基础数学讲义之三

《基础几何学之二》

向量几何，解析几何与球面几何

项武义

香港科技大学数学系

目录

五 向量几何和向量代数 85

5.1 位移向量的基本性质 85

5.2 位移向量的运算律 87

5.2.1 相似三角形定理和位移向量的倍积 88

5.2.2 勾股定理和位移向量的内积 90

5.2.3 面积的勾股定理和位移向量的 ×-积 95

5.3 结语 103

5.4 例题、习题和思考题 105

六 坐标解析几何简介 111

6.1 正交坐标系和平面(或空间)的坐标化 112

6.2 直线和圆，平面和球 116

6.3 圆的反射对称；共轴圆系和共轭等轴圆系 123

七 球面几何和球面三角学 131

7.1 单位球面的基本性质 131

7.2 球面三角学 139

八 圆锥截线的故事 159

8.1 圆柱截线和圆锥截线 159

8.2 圆锥截线的光学性质 162

8.3 圆锥截线和二次曲线 164

8.4 坐标变换和不变量 165

8.5 五点定一「二次曲线」和六点共在一「二次曲线」的条件 171

8.6 Pascal 定理和 Pappus 定理 172

8.7 Kepler 行星三定律 179
8.8 由 Kepler 定律到牛顿万有引力定律 181
8.9 圆锥截线例题，极与极线 189

第五章

向量几何和向量代数 ——空间结构的系统代数化

在空间中由 A 到 B 的有向直线段 $\overrightarrow{AB}$ 其本身就是 A, B 两点所标记的两个位置之间的差别 (difference between the locations of A and B) 的具体化描述；而位移向量 (displacement vector) 则是将这种「位置差别」加以定量化所定义的基本几何量。它的本质内含是 $\overrightarrow{AB}$ 的方向和长度。换句话说，当两个有向直线段 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 为同向平行而且等长时，两者所表达的位移向量定义为相等。另一方面，空间中的平移变换把空间中每一个点作同向等距的移动，由此可见位移向量本质上就是平移的另一种表达。总之，位移向量和平移是同一事物的两种观点，前者著眼于其所表达的位置移动，而後者则著眼于它是空间一种特殊的保长变换。

5.1 位移向量的基本性质

【定义】：若空间中的一个变换 τ 满足条件

$$\overrightarrow{P\,\tau(P)} \text{ 和 } \overrightarrow{Q\,\tau(Q)} \quad \text{恒为同向平行而且等长}$$

则称 τ 为空间的一个平移 (translation)。

【定理 5.1】： 设 A, B 为空间中任给两点，则存在一个唯一的平移 τ 使得 $\tau(A) = B$（我们将以 $\tau(A, B)$ 记之）。

证明：先证存在性：

若 $A=B$，则恒等变换即为所求者。

若 $A\neq B$，令 Π_1,Π_2 分别是和直线段 $\overline{AB}$ 正交于 A 和 M（M 是 $\overline{AB}$ 的中点）的平面，则 $\mathfrak{R}_{\Pi_2}\circ\mathfrak{R}_{\Pi_1}$ 这个反射对称的组合即为所求者。

再证唯一性：

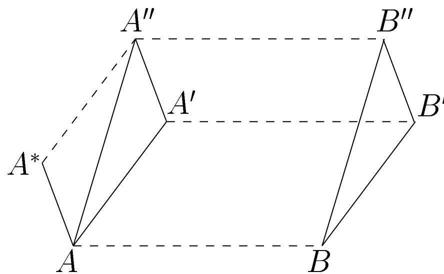
设 P 是空间中任给一点，τ 是上述所作的平移，而 τ' 则是一个将 A 映射到 B 的平移，我们所要证明者是 $\tau'(P)=\tau(P)$。由所设 $\overrightarrow{P\tau'(P)}$, $\overrightarrow{P\tau(P)}$ 都和 $\overrightarrow{AB}$ 同向平行而且等长。因为过 P 点和 $\overrightarrow{AB}$ 平行的直线是唯一存在的，所以 $\tau'(P)=\tau(P)$。由于 P 是任给的，所以 τ' 和 τ 是同一个变换。 □

【定理 5.2】：设 τ_1,τ_2 是空间的两个平移，则 $\tau_2\circ\tau_1$ 也是一个平移，而且 $\tau_2\circ\tau_1=\tau_1\circ\tau_2$。

证明：在此我们将采用简约符号 $A'=\tau_1(A), A''=\tau_2(A')=\tau_2\circ\tau_1(A)$。由所设，对于空间任给两点 A,B 恒有

$$\overrightarrow{AA'} \text{ 和 } \overrightarrow{BB'},\quad \overrightarrow{A'A''} \text{ 和 } \overrightarrow{B'B''}$$

各别同向平行而且等长，而我们所要证明者则是 $\overrightarrow{AA''}$ 和 $\overrightarrow{BB''}$ 也必然同向平行而且等长。其证明如下：



[图 5–1]

如 [图 5–1] 所示，连结 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ 和 $\overrightarrow{A''B''}$。由平面几何中熟知的平行四边形特徵性质可见，

$$\square ABB'A' \text{ 和 } \square A'B'B''A''$$

两者都是平行四边形，所以

$$\overrightarrow{AB} \text{ 和 } \overrightarrow{A'B'},\quad \overrightarrow{A'B'} \text{ 和 } \overrightarrow{A''B''}$$

都是同向平行而且等长，即 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A''B''}$ 也是同向平行而且等长的，因此 $\square ABB''A''$ 乃是一个平行四边形。所以就证明了 $\overrightarrow{AA''}$ 和 $\overrightarrow{BB''}$ 也是同向平行而且等长的，亦即 $\tau_2 \circ \tau_1$ 也是一个平移。

再证：$\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$

令 $A^* = \tau_2(A)$，则有 $\overrightarrow{AA^*}$ 和 $\overrightarrow{A'A''}$ 同向平行而且等长。同理，$\square AA'A''A^*$ 也是一个平行四边形，即有 $\overrightarrow{A^*A''}$ 和 $\overrightarrow{AA'}$ 同向平行而且等长，所以

$$\tau_1 \circ \tau_2(A) = \tau_1(A^*) = A'' = \tau_2 \circ \tau_1(A)$$

而 A 是空间任给一点，亦即 $\tau_1 \circ \tau_2$ 和 $\tau_2 \circ \tau_1$ 是相同的变换。 □

【定义与符号】：定义上述和次序无关的平移组合 $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$ 为 τ_1, τ_2 之和 (sum)，将改用符号 $\tau_1 + \tau_2$ 表示之。再者，往後我们将改用粗体小写字母如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ 等表示位移向量。采取这种符号，$\tau(B,C) \circ \tau(A,B) = \tau(A,B) \circ \tau(B,C) = \tau(A,C)$ 就可以写成 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$，或者 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$。

[注]：在加法符号下，我们把恒等变换这个特殊的平移 τ_0 改用 $\mathbf{0}$ 来表示，因为对于任何平移 τ，恒有 $\tau_0 \circ \tau = \tau \circ \tau_0 = \tau$，而这个事实在加法符号下即为

$$\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

再者 $\overrightarrow{AB}$（亦即 $\tau(A,B)$）的逆变换就是 $\overrightarrow{BA}$（亦即 $\tau(B,A)$），而且有

$$\tau(A,B) \circ \tau(B,A) = \tau_0 = \tau(B,A) \circ \tau(A,B)$$

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB})$$

所以记 $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$（即 $-\tau(A,B) = \tau(B,A)$），亦即

$$(-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0} = \mathbf{a} + (-\mathbf{a})$$

5.2 位移向量的运算律

在上一节所定义的位移向量的加法运算，显然具有下述熟悉的运算律：

<u>交换律</u>： $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

<u>结合律</u>： $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

[注]：因为一般的变换组合都是满足结合律的，而位移向量的加法是定义为平移的组合，当然也会满足结合律。再者，由

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

亦可以直接验证位移向量的加法结合律。

<u>零和可逆性</u>： 以 $\mathbf{0}$ 表示恒等变换这个特殊的平移，$(-\mathbf{a})$ 表示和 $\mathbf{a}$ 互逆的平移，则有

$$\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a} \quad \text{和} \quad \mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{0} \quad \text{恒成立}$$

[注]：平移和[定理 5.2]的证明都和空间中的「平行性」(parallelism) 以及平行四边形定理密切相关的。而交换律 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ 更可以想成是平行四边形定理的向量表述形式。由此可见，往後我们每次运用向量加法交换律，其实也就是对于所研讨的几何问题用了一次平行四边形定理。

5.2.1 相似三角形定理和位移向量的倍积

一个数 a 的整数倍 $n\cdot a$ 其实就是 n 个 a 相加的总和。同样我们也自然地把 n 个（位移向量）$\mathbf{a}$ 相加的总和定义为<u>倍积</u> $n\cdot\mathbf{a}$，亦即：

$$n\cdot\mathbf{a}=\underbrace{\mathbf{a}+\mathbf{a}+\ldots+\mathbf{a}}_{n\text{ 个}}, \quad (n+1)\cdot\mathbf{a}=n\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}$$

再者 $(-n)\cdot\mathbf{a}=n\cdot(-\mathbf{a})=-(n\cdot\mathbf{a})$。

由上述位移向量的整数倍的定义，容易直接验证下列运算律，即：

(i) $m\cdot\mathbf{a}+n\cdot\mathbf{a}=(m+n)\cdot\mathbf{a}$

(ii) $m\cdot(n\cdot\mathbf{a})=(mn)\cdot\mathbf{a}$

(iii) $n \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = n \cdot \mathbf{a} + n \cdot \mathbf{b}$

对于任给整数 m, n 和任给位移向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 恒成立。
[习题：试用归纳法验证 (i), (ii) 和 (iii)。]

设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$，我们可以把 $\overline{AB}$ 作 n 等分，令 $\{B_i, 1 \leq i \leq (n-1)\}$ 为其等分点，则有

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = \ldots = \overrightarrow{B_iB_{i+1}} = \ldots = \overrightarrow{B_{n-1}B}, \quad n \cdot \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB}$$

由此可见，我们应该把 $\frac{1}{n} \cdot \mathbf{a}$ 定义为 $\overrightarrow{AB_1}$，因为它是那个满足 $n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}$ 的唯一解。再者 $\frac{m}{n} \cdot \mathbf{a}$ 的定义应该就是

$$\frac{m}{n} \cdot \mathbf{a} = m \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \mathbf{a}\right) = \frac{1}{n}(m \cdot \mathbf{a})$$

这样，就可以把位移向量的倍积由整数倍扩张到有理数倍。而且上述扩张法是唯一能够使得下列运算律依然成立者，即

(i′) $\frac{m}{n} \cdot \mathbf{a} + \frac{p}{q} \cdot \mathbf{a} = \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) \cdot \mathbf{a}$

(ii′) $\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q} \cdot \mathbf{a}\right) = \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) \cdot \mathbf{a}$

(iii′) $\frac{m}{n} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{m}{n} \cdot \mathbf{a} + \frac{m}{n} \cdot \mathbf{b}$

最後一步，让我们来分析一下位移向量的实数倍应该如何定义。设 λ 是一个非比实数（亦称为无理数），$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$。令 B^* 是直线 AB 上那个唯一的点使得有向长度之比

$$\overrightarrow{AB^*} : \overrightarrow{AB} = \lambda$$

则 $\lambda \cdot \mathbf{a}$ 应该定义为 $\overrightarrow{AB^*}$，因为它是唯一能够使得下述比较原则成立者，即

「设 λ 介于两个有理数 $\frac{m}{n}$ 和 $\frac{p}{q}$ 之间而且 $\overrightarrow{AB'} = \frac{m}{n}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB''} = \frac{p}{q}\overrightarrow{AB}$，则 B^* 亦必介于 B', B'' 之间。」

而运用上述比较原则和 Eudoxus 夹逼原理即可验证上述所定义的实数倍的倍积也满足同样的运算律，即

(i″) $\lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{a} = (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a}$

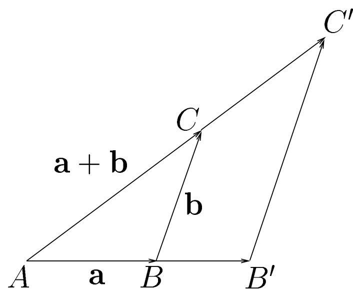
(ii″) $\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{a}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{a}$

(iii″) $\lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}$

对于任给实数 λ, μ 和位移向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 恒成立。

[注]：放大、缩小这种相似变换是空间中常见常用者，而平面几何中的相似三角形定理则是关于相似变换的基本定理。在此，值得注意的是倍积分配律 $k \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k \cdot \mathbf{a} + k \cdot \mathbf{b}$ 的本质就是上述基本定理的代数化形式（参看 [图 5–2]）。

令 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}, \mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$，则 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$。如 [图 5–2] 所示，



[图 5–2]

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C', A = A'$ 而且 k 是其相似比，则 $\overrightarrow{AB'} = k \cdot \mathbf{a}, \overrightarrow{B'C'} = k \cdot \mathbf{b}$, $\overrightarrow{A'C'} = k \cdot \overrightarrow{AC} = k \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$。

5.2.2 勾股定理和位移向量的内积

一个位移向量 $\overrightarrow{AB} = \tau(A, B)$ 含有方向和长度这样两种本质，我们将用符号 $|\mathbf{a}|$ 表示其长度，以 $\angle \mathbf{a}, \mathbf{b})$ 表示两者的方向之差，亦即两者之间的夹角。在平面几何学的研讨中，三角形是既精且简的基本图形，用向量来表达三角形，则它的三个有向边就可以分别表达成 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$。由平面几何中所熟知的 S.S.S. 叠合条件可见夹角 $\angle \mathbf{a}, \mathbf{b})$ 业已被其三边

边长 $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|, |\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ 所唯一确定。再者，中国古算中的勾股定理（即古希腊的毕氏定理）则可以改写成

$$\text{若 } \angle\mathbf{a},\mathbf{b}) = \text{直角，则有 } |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

而在一般 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 并非互相垂直的情形则 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 \neq 0$。例如当 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 的特殊情形，则有

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 4|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2$$

总之，对于任给两个位移向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$，下述函数

$$f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\big\{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2\big\} \tag{5.1}$$

是一个值得研讨的几何量，例如 $f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$ 乃是 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 互相垂直的充要条件，而 $f(\mathbf{a},\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$。所以它显然是一个和 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的长度、夹角都密切相关的几何量。但是归根究底 (5.1)–式所定义的几何量是否真正有用、好用，还得要看它是否具有简洁好用的优良性质。它显然具有对称性，即 $f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = f(\mathbf{b},\mathbf{a})$，而详加研讨的结果会发现它其实还具有下述简洁易算的性质，即

$$f(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}) = f(\mathbf{a},\mathbf{b}) + f(\mathbf{a},\mathbf{c}) \tag{5.2}$$

若以 $f(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的定义（即 (5.1)–式）代入 (5.2)–式，即得所需证者，实乃下述含有三个任意向量的恒等式，亦即

$$\begin{aligned} &2\big\{f(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}) - f(\mathbf{a},\mathbf{b}) - f(\mathbf{a},\mathbf{c})\big\} \\ &:= |\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{c}+\mathbf{a}|^2 \\ &\qquad + |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 \overset{?}{\equiv} 0 \end{aligned} \tag{5.2$'$}$$

要证明上述对于任给三个向量 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ 都普遍成立的恒等式之前，自然要看一看是否有一种对于任给二个向量 $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ 都普遍成立的恒等式呢？若有，则一来肯定比较容易证明，二来说不定还可以把「後者」用来证明「前者」。要把上述想法付诸实践，当然就得有一个「後者」究竟是怎麽样的恒等式的「猜想」才能进而证明之，是不？

在此，我们自然要用上反推法去「按图索骥」。亦即假想 (5.2)–式成立的话，应该会有那种对于任何一对向量都普遍成立的恒等式？若用 (5.2)–式反推，则有

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= f(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}) \qquad \text{（用 (5.2)–式展开）}\\
&= |\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2+f(\mathbf{u},\mathbf{v})+f(\mathbf{v},\mathbf{u})\\
|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 &= f(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}) \qquad \text{（用 (5.2)–式展开）}\\
&= |\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-f(\mathbf{u},\mathbf{v})-f(\mathbf{v},\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

由此可见，应该有恒等式（称之为广义勾股定理）

$$
|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2+|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 \equiv 2|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{v}|^2 \tag{5.3}
$$

请注意，上面这一小段反推法分析只是说明：假如 (5.2)–式恒成立，则 (5.3)–式也恒成立。而我们真正要做的是先用几何直接证明 (5.3)–式恒成立，然後再设法用它来证明 (5.2)–式（亦即 (5.2′)–式）恒成立。反推法的分析其实只是让我们想到 (5.3)–式恒成立这个待证的猜想。在论证上述猜想之前，不妨先对几个特别简单的情形，看一看它是否成立，亦即在 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 之间的夹角是 $0, \frac{\pi}{2}$ 和 π 这三种情形：

当 $\angle \mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ 时，$|\mathbf{u}\pm\mathbf{v}| = \big||\mathbf{u}|\pm|\mathbf{v}|\big|$，所以

$$
|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2+|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = \big(|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|\big)^2+\big(|\mathbf{u}|-|\mathbf{v}|\big)^2 = 2|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{v}|^2
$$

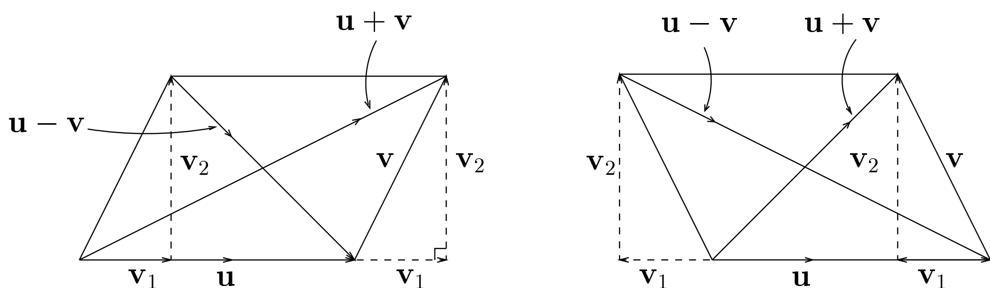
当 $\angle \mathbf{u},\mathbf{v}) = \pi$ 时，$|\mathbf{u}\pm\mathbf{v}| = \big||\mathbf{u}|\mp|\mathbf{v}|\big|$，所以

$$
|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2+|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = \big(|\mathbf{u}|-|\mathbf{v}|\big)^2+\big(|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|\big)^2 = 2|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{v}|^2
$$

当 $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ 时，由勾股定理，即有

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2\\
&\Rightarrow\ |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2+|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{v}|^2
\end{aligned}
$$

上述对于三种简单特例的验证，其实也提供了下述把一般的情形的证明归于上述业已验证的三种特殊情形来加以推导的思路，如 [图 5–3] 所示，我们可以用垂直投影把 $\mathbf{v}$ 分解成 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$，其中 $\mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{u}$ 垂直而 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{u}$ 同向（或反向）。



[图 5–3]

这样，就可以把 (5.3)–式的证明归于上述三种业已验证的情形作如下推导：

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}+\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 \\
&|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}-\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 \\
&|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}+\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{u}-\mathbf{v}_1|^2 + 2|\mathbf{v}_2|^2 \\
&\quad = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}_1|^2 + 2|\mathbf{v}_2|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

现在让我们再用刚才证明的 (5.3)–式纯代数地去推导 (5.2′)–式的普遍成立：

令 $\mathbf{u} = \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{v} = \mathbf{c}$，即有

$$\text{(i)} \qquad |\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 - 2|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{c}|^2 = 0$$

令 $\mathbf{u} = \mathbf{a}, \mathbf{v} = \mathbf{b}-\mathbf{c}$，即有

$$\text{(ii)} \qquad -|\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 + 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 = 0$$

令 $\mathbf{u} = \mathbf{a}+\mathbf{c}, \mathbf{v} = \mathbf{b}$，即有

$$\text{(iii)} \qquad |\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 - 2|\mathbf{a}+\mathbf{c}|^2 - 2|\mathbf{b}|^2 = 0$$

令 $\mathbf{u} = \mathbf{b}, \mathbf{v} = \mathbf{c}$，即有

$$\text{(iv)} \qquad -2|\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 - 2|\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 + 4|\mathbf{b}|^2 + 4|\mathbf{c}|^2 = 0$$

将上述四个恒等式相加後再遍乘以 $\frac{1}{2}$，即得恒等式 (5.2′)，亦即 (5.2)–式普遍成立。

总结上面的讨论，我们以勾股定理为基础，证明几何量 $f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2\}$ 具有 (5.2)–式所表达既简且精的性质，它将是用向量去研讨几何广泛有用的有力工具。在向量代数中，我们索兴把

它想成是一种由两个向量求得一个数值的一种乘积，叫做向量的内积 (inner product) 并改用符号 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 表达之，亦即以

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{2}\left\{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2\right\} \tag{5.1'}$$

为向量内积的定义式。这样做的基本原由就是使得性质 (5.2) 可以直截了当地改写成

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \tag{5.2''}$$

这种分配律的形式，使得它运用起来能够更加得心应手。

【定义】：（向量内积）位移向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的内积 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 定义为

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{2}\left\{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2\right\}$$

内积的运算律：

(i) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$

(iii) $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(k\mathbf{b})=k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

[当 k 是整数或有理数时，(iii) 是 (i) 和 (ii) 的推论。当 k 是非比实数时，则可用倍积的比较原则和 Eudoxus 原理加以推导。]

内积的几何意义：

(i) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$

(ii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0\Leftrightarrow\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ （亦即 $\angle\mathbf{a},\mathbf{b})=\pm\frac{\pi}{2}$ ）

(iii) 在 $\angle\mathbf{a},\mathbf{b})=\theta$ 的一般情形

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta$$

[(iii) 的证明] 先验证 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ 这两种特殊情形。
若 $\theta = 0$，则有 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$。所以

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}\big\{(|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|)^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2\big\} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos 0$$

若 $\theta = \pi$，则有 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = \Big||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|\Big|$，所以

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}\big\{(|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|)^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2\big\} = -|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos \pi$$

在一般的情形，可将 $\mathbf{b}$ 分解成

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$$

而 $\angle\mathbf{a},\mathbf{b}_1) = 0$ 或 π，则有

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_2\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1 = \pm|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}_1|\end{aligned}$$

而 $\pm|\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}|\cos\theta$。 □

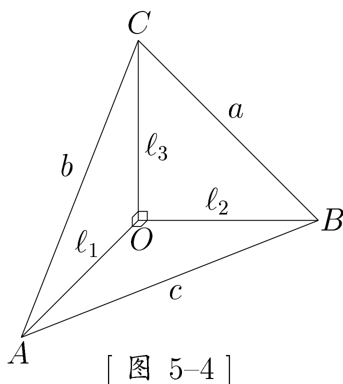
[注]：上述公式提供了用内积表达两个非零向量的夹角馀弦的公式，即

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}}$$

其实，上述公式就是平面几何中熟悉的馀弦定律。由此可见，长度和角度都可以用向量内积去有效计算，而内积本身又具有一套十分简明有力的运算律，特别是分配律。在本质上，内积分配律乃是勾股定理的提升和精简之所得，也可以说是勾股定理代数化的最佳形式。

5.2.3 面积的勾股定理和位移向量的 $\times$–积

四面体是三角形的三维推广。而具有三个棱正交于一点的四面体则是直角三角形的推广，我们将称之为正交四面体，如 [图 5–4] 所示：



[图 5–4]

面积的勾股定理：

设 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ 正交于 O，它共交于 O 点的三个三角形 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ 互相垂直，而 $\triangle ABC$ 则是和其他三个面斜交者。是否也有类似于勾股定理的公式说明上述正交四面体的四个面积之间的关系呢？例如斜面面积的平方是否恒等于其他三个面的面积平方之和呢？这就是我们接着所要论证者。

【定理 5.3】：（面积的勾股定理）一个正交四面体的斜面面积的平方恒等于其他三个面的面积平方之和，亦即如 [图 5–4] 所示

$$(\triangle ABC)^2 = (\triangle OAB)^2 + (\triangle OBC)^2 + (\triangle OCA)^2$$

证明：令正交四面体的三个正交于 O 点的棱长分别是 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3，则由勾股定理即得其斜面 $\triangle ABC$ 的三边边长分别是

$$a = \sqrt{\ell_2^2 + \ell_3^2},\ \ b = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_3^2},\ \ c = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}$$

易见其三个互相正交的三角形的面积分别为

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}\ell_1\ell_2,\ \ \triangle OBC = \frac{1}{2}\ell_2\ell_3,\ \ \triangle OCA = \frac{1}{2}\ell_3\ell_1$$

再者，由平面几何中的秦九韶公式，其斜面面积平方是

$$\begin{aligned}
&(\triangle ABC)^2\\
&= \frac{1}{16}\left\{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)\right\}\\
&= \frac{1}{16}\Big\{2\big[(\ell_2^2+\ell_3^2)(\ell_1^2+\ell_3^2)+(\ell_1^2+\ell_3^2)(\ell_1^2+\ell_2^2)+(\ell_1^2+\ell_2^2)(\ell_2^2+\ell_3^2)\big]\\
&\qquad -\big[(\ell_2^2+\ell_3^2)^2+(\ell_1^2+\ell_3^2)^2+(\ell_1^2+\ell_2^2)^2\big]\Big\}\\
&= \frac{1}{16}\left\{4\ell_1^2\ell_2^2+4\ell_2^2\ell_3^2+4\ell_3^2\ell_1^2\right\}\\
&= (\triangle OAB)^2+(\triangle OBC)^2+(\triangle OCA)^2
\end{aligned}$$

□

在坐标几何中，勾股定理的重要推论是下述距离公式

$$\left|\overline{P_1P_2}\right|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

其几何意义是：空间中直线段 $\overline{P_1P_2}$ 的长度平方等于它在三个互相垂直的直线上的各别垂直投影的长度平方之和。再者，设向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在三个坐标轴上的垂直投影的有向长度分别是 (a_1,a_2,a_3) 和 (b_1,b_2,b_3)，则有内积坐标计算公式

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

当 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ 时，即有

$$|\mathbf{a}|^2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

由此可见上述内积公式实乃距离公式的推广。

[定理 5.3]的几何意义是：空间中一片平面的面积平方等于它在三个互相垂直的平面（例如一个正交坐标系的三个坐标面）上的垂直投影的面积平方之和。由此可以猜想到，我们也应该试著将面积的勾股定理的本质进一步转化为在空间中一片平面和另一片平面之间的「内积」的适当定义。

假如我们把一个有向线段想成一种有向的 1–维基本几何事物，定向平行四边形 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 想成一种有向的 2–维基本几何事物，就自然会想到是否也可以定义一种 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $//(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 之间的「内积」使得

$$//(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot//(\mathbf{a},\mathbf{b})=//(\mathbf{a},\mathbf{b})\text{ 的面积平方}$$

而且 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $//(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 的「内积」也可以有类似于上述的坐标计算公式。

让我们先来看看 1–维的情形。设 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 共线，则两者的内积就等于它们的有向长度的乘积，即：

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\begin{cases}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}| & \text{若两者同向，}\\ -|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}| & \text{若两者异向。}\end{cases}$$

若 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 不共线，令 $\overrightarrow{C'D'}$ 是 $\overrightarrow{CD}$ 在 AB 上的垂直投影，则

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\text{ 和 }\overrightarrow{C'D'}\text{ 的有向长度之乘积。}$$

现在让我们试著对于 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $//(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 的内积作类同的定义如下，即

(i) 当 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $//(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 共面时，定义其内积为两者的定向面积的乘积；

(ii) 当 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $//(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 不共面时，则定义其内积为 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $//(\mathbf{c}',\mathbf{d}')$ 的定向面积的乘积，其中 $//(\mathbf{c}',\mathbf{d}')$ 乃是 $//(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 在 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 所在平面上的垂直投影。

且以符号 $<//(\mathbf{a},\mathbf{b}),//(\mathbf{c},\mathbf{d})>$ 表示上面所定义的量。

【定理 5.4】：

$$<//(\mathbf{a},\mathbf{b}),//(\mathbf{c},\mathbf{d})>=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}$$

<u>证明</u>：(i) 设 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $//(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 共在一个平面 Π 之内。在 Π 上取定一组向量 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$, $|\mathbf{e}_1|=|\mathbf{e}_2|=1$, $\angle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=\frac{\pi}{2}$。令 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i=a_i$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_i=b_i$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{e}_i=c_i$, $\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_i=d_i$, $i=1,2$，则由上述定义和行列式乘法公式即有

$$\begin{aligned}<//(\mathbf{a},\mathbf{b}),//(\mathbf{c},\mathbf{d})> &= \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}a_1c_1+a_2c_2 & b_1c_1+b_2c_2\\ a_1d_1+a_2d_2 & b_1d_1+b_2d_2\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

(ii) 设 $/\!/(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $/\!/(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 不共面，而 $/\!/(\mathbf{c}',\mathbf{d}')$ 则是 $/\!/(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 垂直投影到 $/\!/(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的所在平面 Π 的影象，由定义和上述所已证者，即有

$$\begin{aligned} <\!/\!/(\mathbf{a},\mathbf{b}),/\!/(\mathbf{c},\mathbf{d})\!> &= <\!/\!/(\mathbf{a},\mathbf{b}),/\!/(\mathbf{c}',\mathbf{d}')\!> \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}' & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}' \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}' & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

再者，$\mathbf{c}-\mathbf{c}'$ 和 $\mathbf{d}-\mathbf{d}'$ 乃是垂直于 Π 的向量，而 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 则是位于 Π 之内者，所以

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{c}')=0, \qquad \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{c}')=0 \\ &\mathbf{a}\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{d}')=0, \qquad \mathbf{b}\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{d}')=0 \end{aligned}$$

亦即

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}'=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}, \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}'=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}, \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}'=\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}, \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}'=\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}$$

即已证得

$$<\!/\!/(\mathbf{a},\mathbf{b}),/\!/(\mathbf{c},\mathbf{d})\!>= \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix} \qquad \square$$

[定理 5.4]的公式充分显示这种内积的 2–维推广肯定就是我们所想要者，例如

$$\begin{aligned} <\!/\!/(\mathbf{a},\mathbf{b}),/\!/(\mathbf{a},\mathbf{b})\!> &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \end{vmatrix} \\ &= |\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2-\big(|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta\big)^2 \\ &= \big(|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin\theta\big)^2 \\ &= /\!/(\mathbf{a},\mathbf{b}) \text{ 的面积平方} \end{aligned}$$

再者，设 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 分别是一个取定正交坐标系在 x,y,z 轴上的单位向量。令

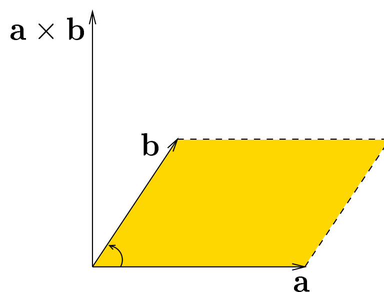
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{c} &= c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2+c_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{d} &= d_1\mathbf{e}_1+d_2\mathbf{e}_2+d_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

不难用直接计算去验证：

$$
\begin{aligned}
&<//(\mathbf{a},\mathbf{b}),//(\mathbf{c},\mathbf{d})> \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\
&\qquad + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \\
&= <//(\mathbf{a},\mathbf{b}),//(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)> \cdot <//(\mathbf{c},\mathbf{d}),//(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)> \\
&\qquad + <//(\mathbf{a},\mathbf{b}),//(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)> \cdot <//(\mathbf{c},\mathbf{d}),//(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)> \\
&\qquad + <//(\mathbf{a},\mathbf{b}),//(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1)> \cdot <//(\mathbf{c},\mathbf{d}),//(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1)>
\end{aligned}
$$

向量的 $\times$–积：

在一个已经定向的空间之中（通常约定以右手型为所选之正向），我们可以用一个唯一的向量 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ 去充分表达空间中一个（定向）平行四边形 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的方向和面积，如 [图 5–5] 所示。它是一个和 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 皆为正交，长度等于 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的面积而 $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ 是右手型者，称之为 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的 $\times$–积。



[图 5–5]

由上述 $\times$–积的定义易见

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$$

而且对于任给 $\mathbf{c}$，

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$$

其实上式就是平行六面体的体积等于底面积乘高的向量表达式。

【定理 5.5】：向量的 $\times$–积满足下列运算律：

(i) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$

(ii) $(k\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(k\mathbf{b})=k(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

(iii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$

(iv) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)=\mathbf{a}\times\mathbf{b}_1+\mathbf{a}\times\mathbf{b}_2$

(v) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}$

(vi) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}-\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$

证明：

(ii) $$[(k\mathbf{a})\times\mathbf{b}-k(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]\cdot\mathbf{c}=V(k\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})-kV(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=0,\quad\forall\mathbf{c}$$
$$\Rightarrow k\mathbf{a}\times\mathbf{b}-k(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{0}$$

(iii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=V(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a})=V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$$

(iv) $$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)-\mathbf{a}\times\mathbf{b}_1-\mathbf{a}\times\mathbf{b}_2]\cdot\mathbf{c}$$
$$=V(\mathbf{a},\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2,\mathbf{c})-V(\mathbf{a},\mathbf{b}_1,\mathbf{c})-V(\mathbf{a},\mathbf{b}_2,\mathbf{c})=0,\quad\forall\mathbf{c}$$
$$\Rightarrow\mathbf{a}\times(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)-\mathbf{a}\times\mathbf{b}_1-\mathbf{a}\times\mathbf{b}_2=\mathbf{0}$$

(v) 乃是[定理 5.4]和 $\times$–积定义的直接结合。

(vi) $$[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}-\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}]\cdot\mathbf{d}$$
$$=[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}]\cdot\mathbf{d}-[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\cdot\mathbf{d}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})$$
$$=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})-(\mathbf{d}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})$$
$$=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\mathbf{d}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{d}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\end{vmatrix}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})$$
$$=0\quad\forall\mathbf{d}$$
$$\Rightarrow(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}-\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}=\mathbf{0}$$

四元数——时空的代数：

时间是一维的，空间是三维的，所以时空组合的总体是四维的，亦即

$$\mathbb{R}\oplus\mathfrak{U}=\{(t,\mathbf{a});\ t\in\mathbb{R},\ \mathbf{a}\in\mathfrak{U}\}$$

Hamilton 的创见赋予时空一种既自然又美妙的代数结构，这也就是著名的四元数 (quaternions)。其加、乘运算的定义如下：

$$\begin{aligned}(t_1,\mathbf{a}_1)+(t_2,\mathbf{a}_2)&=(t_1+t_2,\ \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\\(t_1,\mathbf{a}_1)\cdot(t_2,\mathbf{a}_2)&=(t_1t_2-\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2,\ t_1\mathbf{a}_2+t_2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\end{aligned}$$

上述加、乘运算除了乘法的交换律之外，满足所有其他各种惯用的运算律，例如加法的交换律和结合律，加、乘结合的分配律和乘法的结合律等等。其中验起来比较繁复的是乘法结合律，兹证之如下：运用分配律，可以把所要验证的要点归结到

$$[(0,\mathbf{a})\cdot(0,\mathbf{b})]\cdot(0,\mathbf{c})\stackrel{?}{=}(0,\mathbf{a})\cdot[(0,\mathbf{b})\cdot(0,\mathbf{c})]$$

这个最不平凡的情形。由前述四元数的定义，即有

$$\begin{aligned}[(0,\mathbf{a})\cdot(0,\mathbf{b})]\cdot(0,\mathbf{c})&=(-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(0,\mathbf{c})\\&=\big(-V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}),\ -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\big)\\(0,\mathbf{a})\cdot[(0,\mathbf{b})\cdot(0,\mathbf{c})]&=(0,\mathbf{a})\cdot(-\mathbf{b}\cdot\mathbf{c},\ \mathbf{b}\times\mathbf{c})\\&=\big(-V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}),\ -(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}+\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\big)\end{aligned}$$

由此可见，用[定理 5.5]的公式 (vi) 即有

$$[(0,\mathbf{a})\cdot(0,\mathbf{b})]\cdot(0,\mathbf{c})-(0,\mathbf{a})\cdot[(0,\mathbf{b})\cdot(0,\mathbf{c})]\equiv(0,\mathbf{0})$$

再者，我们也可以类同于复数 (complex number) 的情形定义共轭和绝对值，即

$$\begin{aligned}\overline{(t,\mathbf{a})}&=(t,-\mathbf{a})\\\big|(t,\mathbf{a})\big|&=\sqrt{t^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\end{aligned}$$

则有

$$(t, \mathbf{a}) \cdot \overline{(t, \mathbf{a})} = (t^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{0})$$
$$(t, \mathbf{a})^{-1} = \frac{1}{\left|(t, \mathbf{a})\right|^2} \cdot (t, -\mathbf{a})$$

总之，四元数乃是研讨时空的精简有效的数学工具，它也是研究学习电磁学、狭义相对论的基本工具。

5.3 结语

总结上述对于空间的保长变换和向量代数的讨论，我们再提纲挈领地把所得的结果和认识作一概括性的系统列述：

1. 反射对称是空间中最为简单的保长变换，而空间的所有其他保长变换又都可以由它们的组合而得之，所以它们又是最为基本者。再者，等腰三角形是一种最为初等简朴的反射对称图形；在古希腊的几何学中，能够仅用等腰三角形的各种特徵性质之间的逻辑转换来分析空间对称性在几何学中的各种各样反映，究其原因其实也就是反射对称性的组合，已经含盖了保长变换的全体这个基本事实。

2. 将两个反射对称 $\{\mathfrak{R}_{\Pi_1}, \mathfrak{R}_{\Pi_2}\}$ 加以组合，其所得的保长变换以 Π_1, Π_2 是否相交而分成两种：当 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \phi$ 时 $\mathfrak{R}_{\Pi_2} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_1}$ 是一个<u>平移</u>，它把空间每一点在 Π_1, Π_2 的公垂线上由 Π_1 往 Π_2 的方向向前移动 $2d(\Pi_1, \Pi_2)$；当 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \ell$ 时，$\mathfrak{R}_{\Pi_2} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_1}$ 保持其交线 ℓ 上的每一点固定不动，而其他各点 P 则在其 ℓ 的垂面 $\Pi(P)$ 中以 $\Pi(P) \cap \ell$ 为中心作 $2\angle\Pi_1, \Pi_2)$ 的旋转。

3. 两个平移 τ_1, τ_2 的组合还是一个平移，而且 $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$。用群的术语来说，空间所有平移组成的是保长变换群的一个正规子群；从几何的本质来看，一个平移把空间每一点都作了一个<u>同向等距</u>的位置移动，所以它是位移的自然「量化」，称之为位移向量。总之，<u>平移</u>和<u>位移向量</u>是同一事物的两种观点；从变换观点来看叫做平移，从几何的本质来看则是位移向量，这是同一事物的两面

观，各有所长。我们用前者来定义其加法和倍积，但是在讨论长度、角度、面积、体积等等的几何内含时，则自要采取位移、有向线段这种几何的观点。在第二节中的讨论中，这种观点的自然转换是十分明显的。

4. 位置是空间最为基本原始的概念，由此可见位移向量理所当然地是空间的最为基本原始的几何量。第二节中所讨论的向量代数基础理论也就是要把其他各种各样基本几何量归结到位移向量去表达、计算；由此自然地产生了内积和×–积运算，但是这种顺理成章、返璞归真的探索的成果，不但求得用位移向量去表达、计算其他基本几何量的精而简的公式，而且还把定量几何学中的基本定理如相似三角形定理、勾股定理和面积勾股定理等等有系统地转换成向量代数中的运算律！例如：

(i) 向量加法的定义（即[定理 5.1]）植基于空间的平直性（亦即平行性或三角形内角和恒为平角）。在古典几何学中关于平行的基本定理就是平行四边形的各种特徵性质之间的转换，而平行四边形定理所转换而得者就是向量加法的交换律！

(ii) 相似放大缩小是（欧氏）空间的特色，这也就是向量的倍积的来源。 而关于相似形的基本定理——相似三角形定理——用倍积来表达就是倍积分配律：

$$k \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

(iii) 关于长度和角度的基本定理——勾股定理及广义勾股定理——经过一番分析和整理之後又可以简化、优化而成为简单易用的内积分配律：

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

(iv) [定理 5.4]和[定理 5.5]所总结的 ×–积运算律乃是空间几何学中关于面积、体积、两面角等等的基本定理是也！但是这些基本定理在古希腊时期尚未能发现。

由上述分析可见向量运算不仅提供了表达计算各种各样基本几何量的有效能算的代数公式，而向量运算律本身其实就是一套完美

精简的几何基本定理，且其中重要的都是分配律或多线性函数这种简单易用的形式表达。由此可见，向量代数乃是空间结构的全面而且美妙的代数，而其运算律则是空间本质（亦即基本定理所表达者）的一种至精至简的表达。

5. 空间的基本结构在于任给两点 A, B 之间的唯一最短通路——直线段 $\overline{AB}$，而空间的基本本质主要的就是对称性和平直性。在古希腊几何学中，用叠合公理来描述对称性，而用平行公理来描述平直性；在现代的几何学中，我们把空间的对称性的总体赋予自然而且全局的结构，称之为保长变换群，而其中的平移子群则系统表述了空间的平直性，从而把空间几何学的研讨提升到保长变换群的不变量理论。再者，向量运算都是在正交变换之下协变的 (covariant)，所以用向量运算所得的数量 (scalar) 都自然而然是不变的 (invariant)。

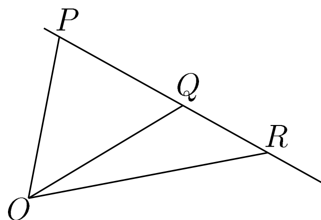
总结上述五点分析，我们认识到用向量代数研讨几何可以寓不变量理论于向量运算之中，而空间的基本性质和基本定理的运用则转化为其运算律的系统运用。这就是学习向量几何，并用以探索大自然所要达到的境界！

5.4 例题、习题和思考题

【例题】：

(1) P, Q, R 三点共线的向量条件式：

设 P, Q, R 三点共线，O 是任选之原点，即如 [图 5–6] 所示：



[图 5–6]

则存在实数 k，使得 $\overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{PQ}$，亦即

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = k\big(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\big) \\ \Rightarrow\ &(k-1)\overrightarrow{OP} + (-k)\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

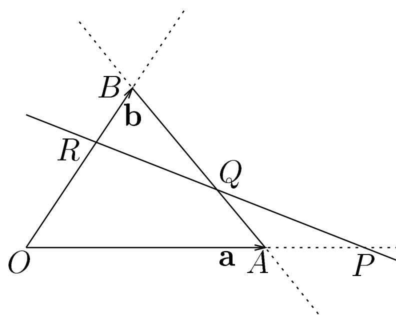
换言之，存在有不全为零的系数 α, β, γ 满足

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{OP} + \beta\overrightarrow{OQ} + \gamma\overrightarrow{OR} = \mathbf{0} \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad\qquad (\text{设 } \gamma \neq 0) \end{cases}$$

反之，若存在满足上述条件的 α, β, γ（设 $\gamma \neq 0$），即有

$$\beta\big(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\big) + \gamma\big(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}\big) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PR} = (-\frac{\beta}{\gamma})\overrightarrow{PQ}$$

(2) 用向量代数证明 Menelous 定理：



[图 5–7]

令 $\overrightarrow{OP} = k_1\mathbf{a}, \overrightarrow{OR} = k_2\mathbf{b}, \overrightarrow{OQ} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$。首先，由 A, B, Q 三点共线的向量条件式，即有

$$\begin{aligned} &x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + (-1)\overrightarrow{OQ} = \mathbf{0} \\ \Rightarrow\ &x + y - 1 = 0 \end{aligned}$$

再者，由 P, Q, R 三点共线的向量条件式，即有

$$\begin{aligned} &\frac{x}{k_1} \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{y}{k_2} \cdot \overrightarrow{OR} + (-1)\overrightarrow{OQ} = \mathbf{0} \\ \Rightarrow\ &\frac{x}{k_1} + \frac{y}{k_2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

由此解得

$$x = \frac{k_1k_2 - k_1}{k_2 - k_1}, \qquad y = \frac{k_1k_2 - k_2}{k_1 - k_2}$$

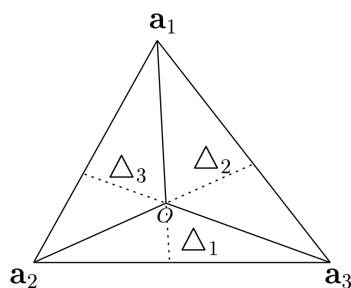
所以

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{PA}} = \frac{k_1}{k_1 - 1}, \qquad \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RO}} = \frac{1 - k_2}{k_2}$$

即得

$$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} = \frac{y}{x} \ \Rightarrow\ \frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{PA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RO}} = -1$$

(3) 重心和 Ceva 定理：



[图 5–8]

设 $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OP_i}$ 分别为质量 μ_i 的三个质点的位置向量，则其重心的位置向量就是

$$\frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}(\mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \mu_3\mathbf{a}_3) = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3$$

其中 m_i 是 P_i 的质量百分比（亦即 $m_1 + m_2 + m_3 = 1$）。若改用重心作为原点，则 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ 满足条件式

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

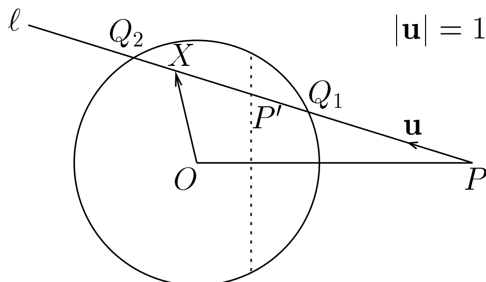
由 $(m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3) \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ 得

$$\begin{aligned} & m_1\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 + m_2\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \\ \Rightarrow\ & -m_1 \triangle_2 + m_2\triangle_1 = 0 \\ \Rightarrow\ & \triangle_1 : \triangle_2 : \triangle_3 = m_1 : m_2 : m_3 \\ \Rightarrow\ & \triangle_i = m_i\triangle \end{aligned}$$

这其实乃是 Ceva 定理在「力学」中的表现。

(4) 圆幂定理的向量证法：

ℓ 为过 P 点的直线，与圆交于 Q_1, Q_2 两点。令 X 为 ℓ 上的一个动点，$\mathbf{u}$ 是沿 ℓ 方向的单位长向量。



[图 5–9]

易见有

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OP} + x\mathbf{u}$$

由此可见，直线 ℓ 上的动点 X 恰好位于以 O 为圆心，半径为 R 的圆上的条件式就是

$$\begin{aligned} R^2 &= \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX} = (\overrightarrow{OP} + x\mathbf{u}) \cdot (\overrightarrow{OP} + x\mathbf{u}) \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} + 2x\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{u} + x^2 \end{aligned}$$

上述二次方程式的两个根 λ_1, λ_2 也就是 $\overrightarrow{PQ_1}$ 和 $\overrightarrow{PQ_2}$ 的有向长度。所以

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} - R^2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -2\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

第一式的几何意义就是

$$\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 - R^2 \qquad \text{（圆幂定理）}$$

第二式的几何意义是什麼呢？

令 P' 是 ℓ 上使得 (PP', Q_1Q_2) 成调和点列之点，亦即

$$\frac{\overrightarrow{Q_1P'}}{\overrightarrow{P'Q_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{Q_2P}}{\overrightarrow{PQ_1}} = -1$$

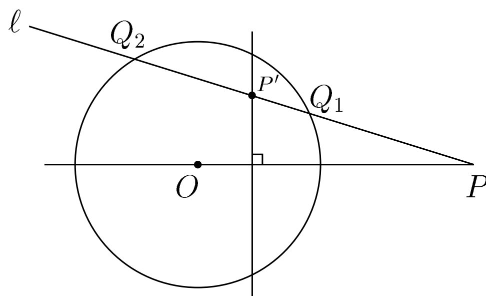
设 $\overrightarrow{PP'} = k\mathbf{u}$，则有

$$\frac{k-\lambda_1}{\lambda_2-k}\cdot\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = -1 \quad\Rightarrow\quad k = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PP'}\cdot\overrightarrow{OP} = k\cdot\mathbf{u}\cdot\overrightarrow{OP} &= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}2\mathbf{u}\cdot\overrightarrow{OP}\\ &= -\lambda_1\lambda_2 = R^2 - \left|\overrightarrow{OP}\right|^2\end{aligned}$$

上述向量代数式的几何意义就是：$\overrightarrow{PP'}$ 在直线 OP 上的垂直投影是一个固定的向量，亦即和 ℓ 无关。



[图 5–10]

【习题】：

(1) 试验证在例题 (1) 中当 $\gamma\neq 0$ 的条件换成 $\alpha\neq 0$ 或 $\beta\neq 0$ 时，同样结论亦成立。

设 ℓ_1,ℓ_2 是空间中两条（相异）直线，$A_1,B_1\in\ell_1$, $A_2,B_2\in\ell_2$ 为线上给定的（相异）四点。令 X_1, X_2 分别为 ℓ_1,ℓ_2 上的动点，则容易把 $\overrightarrow{X_1X_2}$ 改写成下述形式：

$$\overrightarrow{X_1X_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + x_1\overrightarrow{A_1B_1} + x_2\overrightarrow{A_2B_2}$$

(2) 问 $\overrightarrow{X_1X_2}$ 同时垂直于 ℓ_1,ℓ_2 的代数条件式是什麼？

(3) 试讨论在什麼的情况下这个公垂线段 $\overline{X_1X_2}$ 是

(i) 唯一存在的，而且其长度不为 0；

(ii) 唯一存在的，但是其长度为 0；

(iii) 并非唯一存在的。

(4) 令 $\overline{P_1P_2}$ 为题 (3)(i) 情形中的公垂线段。试证这是所有 $\overline{X_1X_2}$ 中的最短者。

第六章

坐标解析几何简介

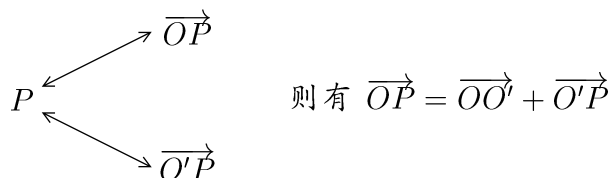
几何学在古希腊文明蓬勃进展，获得辉煌的成就，奠定了定性和定量几何的基础理论。在西方，由古希腊文明一直到十五、六世纪的文艺复兴，理性文明历经了上千年的暗淡时期。其间战乱不断，希腊文明的成果，仅赖东罗马 (Byzantine Empire) 和阿刺伯文明得以保存其大部。长话短说，1453 年东罗马帝国的灭亡迫使大批希腊学者和书稿流入意大利，和当时经由阿刺伯传入的中国印刷术，促成了希腊数理名著如 Euclid 的 "Elements", Apollonius 的 "Conic Sections", Diophantus 的 "Arithmetica" 等等的拉丁文版在意大利相继问世。希腊文明的硕果终于熬过了上千年的暗淡岁月，浴火重生；在欧洲大陆重新札根、萌芽、拙壮，发展成影响全世界的近代科技文明。数学和天文学的进展，又再一次扮演著先行者、奠基者的角色，此点在近代科学的创始者如 Copernicus, Brahe, Kepler, Galileo, Vieta, Descartes, Fermat, Newton, Leibniz 等等的贡献中可见其梗概。而其中影响无比深远者则首推坐标解析几何和微积分，它们奠定了对于各种各样自然现象作深刻的数理分析的基本工具。

Descartes 和 Fermat 在坐标解析几何学上的创建，把当代新兴的代数学，系统地用来研究几何。他们的工作都直接得益于 Vieta 在代数学上的著作。总之，几何学和代数学从此得以密切结合、相辅相成、相得益彰。它不但促进了两者的大幅度进展，而且也使得微积分学的展现变得水到渠成。所以坐标解析几何学的创见，乃是整个人类理性文明发展史上的一件大事。从几何学的发展史来看，向量代数的产生乃是十九世纪中叶的事，足足比坐标解析几何的产生晚了两个世纪。如

今回顾、反思，可见向量代数其实乃是坐标几何的返璞归真和精益求精，它使得几何和代数结合得更加真切自然、直截了当。在此，我们将改用向量代数为工具回头来对于坐标解析几何作一简明扼要的介绍。这种讲法虽然是历史发展的逆序，但是这种返璞归真的向量讲法可以把解析几何的精要体现得更加简明朴实。

6.1 正交坐标系和平面（或空间）的坐标化

在平面（或空间）中取定一点 O 为基点（称之为原点），则其中任给一点 P 的位置就可以用位移向量 $\overrightarrow{OP}$（亦即平移 $\tau(O,P)$）加以唯一确定。改用集合的术语来说，即平面（或空间）中所有点所成的集合和平面（或空间）的所有位移向量（亦即平移）所构成的代数体系之间具有上述自然的一、一对应，即 $P \leftrightarrow \overrightarrow{OP}$（亦即 $\tau(O,P)$）。这个一、一对应显然和原点的选取有关。例如



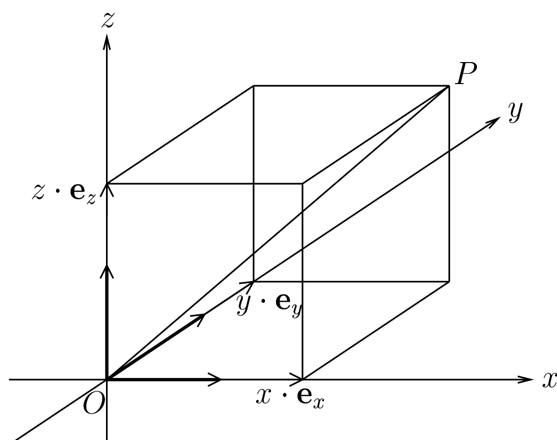
再者，在平面上我们可以取用两个互相垂直的射线 $\overrightarrow{Ox}$ 和 $\overrightarrow{Oy}$，而在空间之中则可以取用三个互相垂直的 $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}$ 和 $\overrightarrow{Oz}$。令 $\mathbf{e}_x$,$\mathbf{e}_y$ 和 $\mathbf{e}_z$ 分别是以 $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}$ 和 $\overrightarrow{Oz}$ 为其方向的单位长向量，则有

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y, \quad \text{其中 } x = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{e}_x,\ y = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{e}_y$$

$$\text{（或 } \overrightarrow{OP} = x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y + z \cdot \mathbf{e}_z$$

$$\text{其中 } x = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{e}_x,\ y = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{e}_y,\ z = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{e}_z \text{）}$$

由此可见 P 点在平面（或空间）中的位置又可以用有序数组 (x, y)（或 (x, y, z)）加以唯一确定，称之为 P 点在平面坐标系 $\{O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$（或空间坐标系 $\{O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$）中的坐标。如 [图 6–1] 所示，$x, y, z$ 的几何意义乃是位移向量 $\overrightarrow{OP}$（亦即有向线段）在 x, y, z–轴上的垂直投影的有号长度是也。



[图 6–1]

在平面上（或空间中）选取一个正交坐标系，不但可以有系统地用有序数偶 (x, y)（或三数组 (x, y, z)）来标记平面上（或空间中）点的位置，而且也可以用下述有序数偶（或三数组）来表达平面上（或空间中）的向量，即

$$\mathbf{a} \leftrightarrow (a_x, a_y):\ a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_x,\ a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_y$$

（或 $\mathbf{a} \leftrightarrow (a_x, a_y, a_z):\ a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_x,\ a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_y,\ a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_z$）

亦即 $\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{e}_x + a_y \cdot \mathbf{e}_y$

（或 $\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{e}_x + a_y \cdot \mathbf{e}_y + a_z \cdot \mathbf{e}_z$）

通常把 a_x, a_y, a_z 分别叫做向量 $\mathbf{a}$ 在 x, y, z 方向的分量 (components)。

再者，用向量 $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ 的下述内积关系

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1$$
$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0$$

和向量运算律即可推导改用分量来表达的向量运算公式，即

$$\mathbf{a} \leftrightarrow (a_x, a_y, a_z), \quad \mathbf{b} \leftrightarrow (b_x, b_y, b_z)$$

(i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} \leftrightarrow (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$

(ii) $k \cdot \mathbf{a} \leftrightarrow (ka_x, ka_y, ka_z)$

(iii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

(iv) 若 $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ 是右手型则有

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} \leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \right)$$

兹验证 (iv)–式如下，其他三式的验证留作习题：

由所设 $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ 的正交性和右手型，即有

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y &= -\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z &= -\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x &= -\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

再用分配律，即有

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z) \times (b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y + b_z\mathbf{e}_z) \\ &= (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y + (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z + (a_z b_x - a_x b_y)\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x \\ &= \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}\mathbf{e}_x + \begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix}\mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

将 (iii)–式和 (iv)–式相结合，即得

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

由此可见，选取正交坐标系所达成者乃是把四种向量运算，有系统地归于向量的分量加以计算，而这些运算公式都是正交性和分配律的直接推论。

<u>距离公式</u>：直线段的长度是空间的各种各样几何量之中的最、最基本者。所以坐标几何的头号基本公式理当是给定两点 P_1, P_2 之间的距离的坐标表达式，即

$$d(P_1,P_2)^2 = \overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$$

[若 P_1, P_2 共在平面 $z=0$ 之上，则 $z_2 - z_1 = 0$。]

夹角公式：设 P_0, P_1, P_2 是给定三点，则 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 和 $\overrightarrow{P_0P_2}$ 之间的夹角 θ 的馀弦可以用它们的内积公式计算之，即

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2}}{\sqrt{\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}}\sqrt{\overrightarrow{P_0P_2}\cdot\overrightarrow{P_0P_2}}}\\ &= \frac{(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)+(z_1-z_0)(z_2-z_0)}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2+(z_2-z_0)^2}}\end{aligned}$$

三角形面积公式：设 P_0, P_1, P_2 是平面上（或空间中）的给定三点，则 $\triangle P_0P_1P_2$ 的定向面积（或不定向面积）可以分别计算如下：

$$\triangle P_0P_1P_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_0 & x_1 & x_2\\ y_0 & y_1 & y_2\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}|\triangle P_0P_1P_2|^2 &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left\{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_0 & x_1 & x_2\\ y_0 & y_1 & y_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ y_0 & y_1 & y_2\\ z_0 & z_1 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ z_0 & z_1 & z_2\\ x_0 & x_1 & x_2\end{vmatrix}^2\right\}\end{aligned}$$

四面体体积公式：设 P_0, P_1, P_2, P_3 是空间中给定四点，则其所张的四面体 $T(P_0, P_1, P_2, P_3)$ 的定向体积可以用下述公式表达之，即

$$V\left(T(P_0,P_1,P_2,P_3)\right) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3\\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3\\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$$

[试用 $V(T(P_0,P_1,P_2,P_3)) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2})\cdot\overrightarrow{P_0P_3}$ 验证上式。]

【习题】：

(1) 试求 $\triangle P_0P_1P_2$ 和 $\triangle P_0P_1P_3$ 之间的两面角的馀弦用 P_i 的坐标 (x_i, y_i, z_i), $0 \le i \le 3$, 的表达式。

(2) 试求平面上三点 $\{P_i(x_i, y_i), 0 \le i \le 2\}$ 共线的条件式。

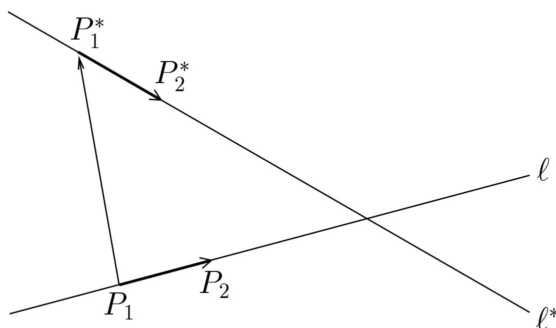
(3) 试求空间中四点 $\{P_i(x_i, y_i, z_i), 0 \le i \le 3\}$ 共面的条件式。

(4) 试求空间中三点 $\{P_i(x_i, y_i, z_i), 0 \leq i \leq 2\}$ 共线的条件式。

(5) 如 [图 6–2] 所示，设 ℓ, ℓ^* 是空间中两条不交线（亦即不共面者），$\overline{P_1P_2}$ 和 $\overline{P_1^*P_2^*}$ 分别是 ℓ, ℓ^* 上单位长线段。试证 $\{d(P, P^*), P \in \ell, P^* \in \ell^*\}$ 的极小值（称之谓 ℓ, ℓ^* 之间的距离）等于下述比值：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_1^* & x_2^* \\ y_1 & y_2 & y_1^* & y_2^* \\ z_1 & z_2 & z_1^* & z_2^* \end{vmatrix} : \left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1^*P_2^*}\right|$$

的绝对值。



[图 6–2]

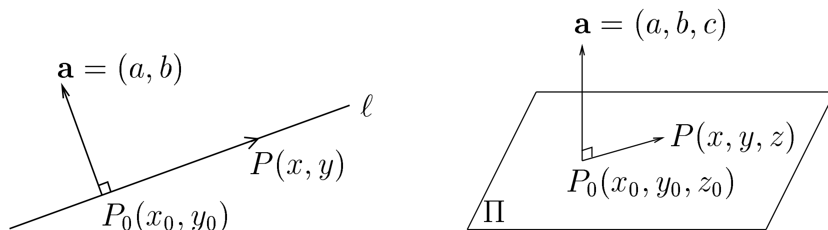
6.2 直线和圆，平面和球

直线与圆是平面上最为精简的一维子集，而平面与球则是空间中最为精简的二维子集。在解析几何中它们都可以用一个简单的方程式去刻划之。

【定理 6.1】：在平面上（或空间内）一条直线（或一个平面）的点的坐标满足一个 $\{x, y\}$（或 $\{x, y, z\}$）的一次方程式。反之，任给一个二元（或三元）一次方程式的所有「解点」构成的子集乃是 (x, y)–平面上（或 (x, y, z)–空间内）的一条直线（或一个平面）。

证明：设 $P_0(x_0, y_0)$（或 $P_0(x_0, y_0, z_0)$）是直线 ℓ（或平面 Π）的取定一点，而 $P(x, y)$（或 $P(x, y, z)$）则是 ℓ（或 Π）上的任意点。再者，如

[图 6–3] 所示，令 $\mathbf{a}=(a,b)$（或 $\mathbf{a}=(a,b,c)$）是平面上（或空间内）和 ℓ（或 Π）垂直的向量：



[图 6–3]

则有

$$0=\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{P_0P}=a(x-x_0)+b(y-y_0)$$
$$（或\ \ 0=\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{P_0P}=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)）$$

亦即 $P(x,y)\in\ell$（或 $P(x,y,z)\in\Pi$）乃是上述二元（或三元）一次方程的「解点子集」。

反之，设 S（或 S^*）分别是下述二元（或三元）一次方程的解点子集，即

$$ax+by+c=0$$
$$（或\ \ ax+by+cz+d=0）$$

令 $P_0(x_0,y_0)$（或 $P_0(x_0,y_0,z_0)$）是 S（或 S^*）中取定一点而 $P(x,y)$（或 $P(x,y,z)$）则是 S（或 S^*）中任意一点，则有

$$ax+by+c=0\ \ 和\ \ ax_0+by_0+c=0$$
$$（或\ \ ax+by+cz+d=0\ \ 和\ \ ax_0+by_0+cz_0+d=0）$$

两者相减，即得

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0\ \Leftrightarrow\ (a,b)\perp\overrightarrow{P_0P}$$
$$（或\ \ a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\ \Leftrightarrow\ (a,b,c)\perp\overrightarrow{P_0P}）$$

由此可见 S（或 S^*）乃是平面上（或空间中）过 P_0 点而且和向量 $\mathbf{a}=(a,b)$（或 $\mathbf{a}=(a,b,c)$）垂直的那条直线（或那个平面）是也。 □

[注]：上述论证中所建立的直线（或平面）和二元（或三元）一次方程式之间的相互对应，显示了方程式中变元的系数组（亦即 (a,b) 或 (a,b,c)）乃是直线（或平面）的一个法向量的分量。一条直线（或一个平面）在平面上（或空间中）的所有非零法向量之间只差一个 k–倍。由此可见，一条直线（或一个平面）所对应的二元（或三元）一次方程式之间，也只差一个 k–倍。

【定理 6.2】（点、线或点、面的距离公式）：设 $P_1(x_1,y_1)$（或 $P_1(x_1,y_1,z_1)$）是平面上（或空间内）给定一点，而 ℓ（或 Π）则是以

$$ax+by+c=0$$
$$（或\quad ax+by+cz+d=0）$$

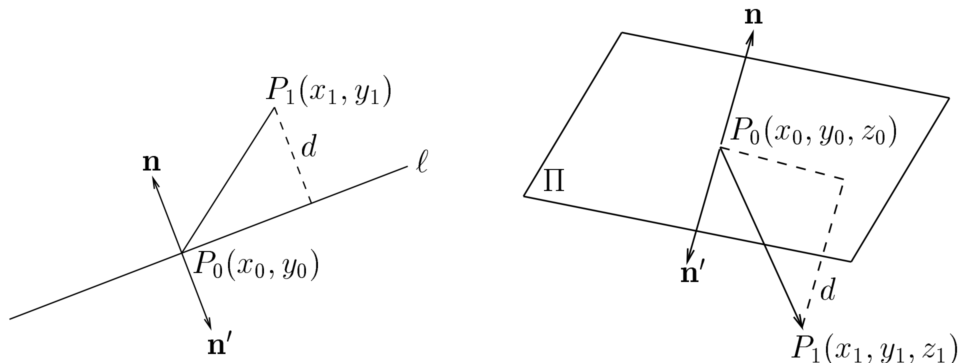
为其方程的直线（或平面），则有下述距离公式：

$$d(P_1,\ell)=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$
$$d(P_1,\Pi)=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

证明：如 [图 6–4] 所示

$$\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b)\quad（或\quad\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)）$$

乃是 ℓ（或 Π）的两个单位长法向量 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$，而 P_0 则是其上任取一点



[图 6–4]

则有

$$d(P_1,\ell) \ \text{或}\ d(P_1,\Pi) = \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_1} \ \text{或}\ \mathbf{n}'\cdot\overrightarrow{P_0P_1}$$ □

【习题】：

(1) 试写下过平面上（相异）两点 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ 的直线的方程式。

(2) 试写下过空间中（不共线）三点 $P_1(x_1,y_1,z_1), P_2(x_2,y_2,z_2), P_3(x_3,y_3,z_3)$ 的平面的方程式。

(3) 试写下过平面上一点 $P_0(x_0,y_0)$ 并垂直于向量 $\mathbf{n}=(a,b)$ 的直线的方程式。

(4) 试写下过空间中一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 并垂直于向量 $\mathbf{n}=(a,b,c)$ 的平面的方程式。

(5) 试写下两条直线的两条交角平分线的方程式。

(6) 试写下两个平面的两个两面角平分面的方程式。

(7) 问在平面上两线（或空间中两面）平行的条件为何？

【定理 6.3】：平面上（或空间中）以 $P_0(x_0,y_0)$（或 $P_0(x_0,y_0,z_0)$）为圆心（或球心）以 R 为半径的圆（或球）的方程式如下，即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$
$$(\text{或}\ \ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2\ )$$

证明：是距离公式和圆与球的定义的直接推论。 □

【推论】：平面上（或空间中）一个圆（或球）所相应的方程式皆可写成下述形式，即

$$k[x^2+y^2+2Dx+2Ey+F]=0$$
$$(\text{或}\ \ k[x^2+y^2+z^2+2Dx+2Ey+2Fz+G]=0\ )$$

其中 D^2+E^2-F（或 $D^2+E^2+F^2-G$）乃是其半径之平方，所以必须非负。反之，任给满足 $D^2+E^2-F\geq 0$（或 $D^2+E^2+F^2-G\geq 0$）的上述二元（或三元）二次方程式的解点子集乃是一个圆（或球）。

证明：令 $(x_0,y_0)=(-D,-E)$（或 $(x_0,y_0,z_0)=(-D,-E,-F)$），则易见上述二元（或三元）二次方程式可以改写成：

$$k[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(D^2+E^2-F)]=0$$

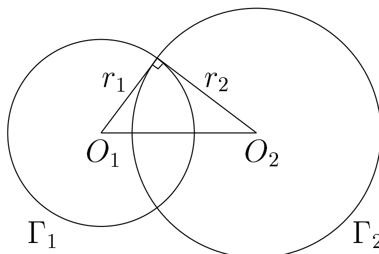
（或 $k[((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-(D^2+E^2+F^2-G)]=0$）

□

【引理】：设 $\Gamma_i: x^2+y^2+2D_ix+2E_iy+F_i=0,\ i=1,2$，则 Γ_1,Γ_2 互相正交的充要条件是其系数满足下列条件：

$$2(D_1D_2+E_1E_2)-(F_1+F_2)=0$$

证明：由上面[推论]易见 $\Gamma_i, i=1,2,$ 的圆心 O_i 的坐标为 $(-D_i,-E_i)$；而其半径平方则为 $r_i^2=D_i^2+E_i^2-F_i$。



[图 6–5]

再者，由 [图 6–5] 中可见两圆正交的充要条件就是 $\overline{O_1O_2}^2=r_1^2+r_2^2$，即

$$(D_2-D_1)^2+(E_2-E_1)^2-(D_1^2+E_1^2-F_1)-(D_2^2+E_2^2-F_2)=0$$

亦即

$$-2(D_1D_2+E_1E_2)+(F_1+F_2)=0$$

□

【定理 6.4】：设 Γ 和两个圆

$$\Gamma_i:\ x^2+y^2+2D_ix+2E_iy+F_i=0,\quad i=1,2$$

都互相正交，则 Γ 和由 Γ_1, Γ_2 所生成的圆系，即

$$k_1(x^2+y^2+2D_1x+2E_1y+F_1)+k_2(x^2+y^2+2D_2x+2E_2y+F_2)=0$$

其中每一个圆都是正交的。

<u>证明</u>：设 Γ 的方程式为

$$\Gamma:\ x^2+y^2+2Dx+2Dy+F=0$$

则由所设的正交性即有

$$\begin{cases} 2(DD_1+EE_1)-(F+F_1)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2(DD_2+EE_2)-(F+F_2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

再者，由 Γ_1, Γ_2 所生成的圆系中的任给一圆的方程式可以改写成标准式为

$$x^2+y^2+2(\frac{k_1D_1+k_2D_2}{k_1+k_2})x+2(\frac{k_1E_1+k_2E_2}{k_1+k_2})y+(\frac{k_1F_1+k_2F_2}{k_1+k_2})=0$$

由 (1), (2) 易得

$$2(D\cdot\frac{k_1D_1+k_2D_2}{k_1+k_2}+E\cdot\frac{k_1E_1+k_2E_2}{k_1+k_2})-(F+\frac{k_1F_1+k_2F_2}{k_1+k_2})=0$$

所以它也是和 Γ 正交的。 □

【习题】：

(1) 试写下过平面上（不共线）三点 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ 的圆的方程式。

(2) 试写下过空间中（不共面）四点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$, $P_4(x_4,y_4,z_4)$ 的球的方程式。

(3) 试求分别以下述方程式表达的直线与圆相交于两点，相切和不相交的系数条件式：

$$\ell:\ ax+by+c=0$$
$$\Gamma:\ x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0, \quad (D^2+E^2-F>0)$$

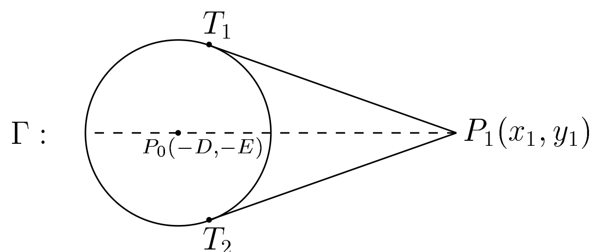
(4) 试求分别以下述方程式表达的平面与球相交于一圆，相切于一点和不相交的系数条件式：

$$\Pi:\ ax+by+cz=0=0$$
$$\Sigma:\ x^2+y^2+z^2+2Dx+2Ey+2Fz+G=0,\quad (D^2+E^2+F^2-G>0)$$

(5) 设 $P_1(x_1,y_1)$ 是位于圆 Γ 外的一点，而 Γ 的方程式是

$$\Gamma:\ x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$$

试求如 [图 6–6] 所示由 P_1 到 Γ 的切线长平方的公式（其值叫做 P_1 点对于 Γ 的幂）。



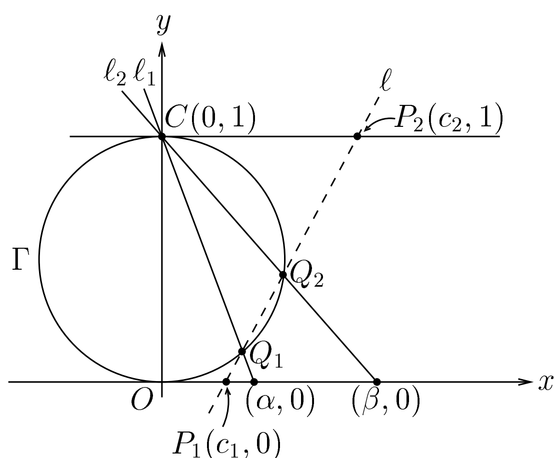
[图 6–6]

(6) 等幂轴：设 Γ_1,Γ_2 是相异两圆，其方程分别为

$$\Gamma_i:\ x^2+y^2+2D_ix+2E_iy+F_i=0,\quad i=1,2$$

和 Γ_1,Γ_2 的切线长相等的点集叫做它们的等幂轴，试求其方程式。

(7) 如 [图 6–7] 所示，$\Gamma: x^2+y^2-y=0$ 乃是一个以 $\overline{OC}$ 为直径的圆。令 $A(\alpha,0)$, $B(\beta,0)$ 为 x–轴上给定两点，连结 $\ell_1=AC$ 和 $\ell_2=BC$ 使得两线分别相交 Γ 于 Q_1,Q_2 两点。



[图 6–7]

(i) 写下 ℓ_1, ℓ_2 的方程。令 g_λ 为下述组合所得的二次曲线

$$\ell_1 \cdot \ell_2 - \lambda\Gamma$$

注意 C, Q_1, Q_2 都在 g_λ 之上。试求一个适当的值 $\lambda = \lambda_0$ 使得 g_{λ_0} 可以被 $(y-1)$ 所整除。

(ii) 上述特殊的 λ_0 令 g_{λ_0} 分解成两个一次方程式的乘积，即

$$g_{\lambda_0} = (y-1) \cdot \ell$$

其中 $\ell = P_1P_2$。求 P_1, P_2 的坐标（亦即 c_1, c_2 的值）。

(iii) 试用上面所得者来描述一个几何作图方法来求解二次方程 $x^2 - px + q = 0$。

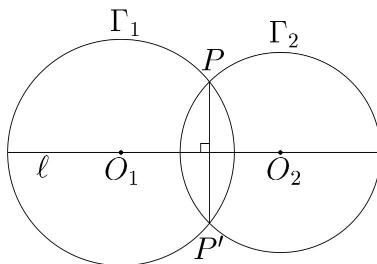
6.3 圆的反射对称；共轴圆系和共轭等轴圆系

所有欧氏平面的保长变换当然都是保圆保角的，但是除了它们之外是否还有不保长的保圆保角变换呢？再者，在欧氏平面的保长变换之中，对于一条给定直线的反射对称则是其中的至精至简者；所有其他保长变换都可以由它们组合而得，在保圆保角变换的范畴中是否也有同样的精简事物呢？上述对于直线的反射对称在保圆保角变换的范畴

中是否可以适当地推广成对于一个圆的反射对称呢？为此，让我们先来做一些温故知新的工作，改用圆与角的观点再来分析一下对于一条直线的反射对称的几何特徵。再者，在以後的讨论中，我们将把直线看做是圆的特例，亦即半径是无穷大的圆。这样做可以使得往後的讨论和叙述变得更加整齐划一、更具统一性，例如原先的「不共线三点定一圆」在新观点之下就变成一律的「三点定一圆」。

【分析】：

(i) 如 [图 6–8] 所示，P, P' 是对于直线 ℓ 成反射对称的任给一对点偶，亦即 ℓ 是线段 $\overline{PP'}$ 的垂直平分线。由此可见，任何过 P, P' 点的圆，如 [图 6–8] 所示的 Γ_1, Γ_2 等，其圆心总是位于 ℓ 之上，因此都是和 ℓ 互相正交的。反之，若过相异两点 P, P' 的任何一个圆总是和 ℓ 正交，则 P, P' 必定和 ℓ 成反射对称。

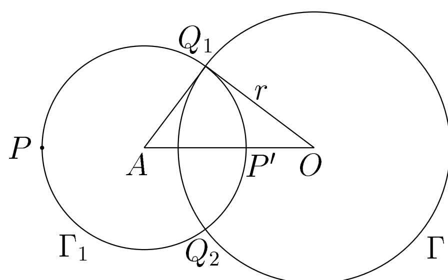


[图 6–8]

由此可问：对于一个定圆 Γ 和不在圆上的一点 P 是否会存在一个点 P' 使得任何过 P, P' 点的圆总是和圆 Γ 互相正交呢？

(ii) 假设果真存在有这样的一个点 P'，则直线 PP' 乃是过 P, P' 的圆的一个特例，所以应该是和 Γ 互相垂直的，因此这个假设中的 P' 应该在 O, P 连线之上（我们且先把 P 点和 Γ 的圆心 O 点相重的情形除外）。再者，设 A 点是 $\overline{PP'}$ 的中点，Γ_1 是以 $\overline{PP'}$ 为直径的圆，亦即以 A 点为圆心，$\frac{1}{2}|\overline{PP'}|$ 为半径者也。由所设它和 Γ 正交于两点 Q_1, Q_2（如 [图 6–9] 所示）。由此可见，AQ_i 是圆 Γ 的切线，而 OQ_i 则是 Γ_1 的切线。再由圆幂定理即得

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$



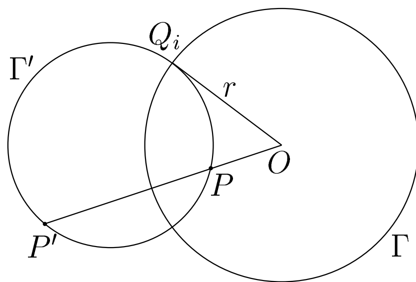
[图 6–9]

上述分析说明了：设 $P \neq O$ 而且不在圆 Γ 之上，假设存在有它的「对称点」P'，则它必须就是那个在射线 $\overrightarrow{OP}$ 之上而且 $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ 的点。下述引理则证明这样的 P' 点，的确是具有所要求的性质者。

【引理】：设 Γ 是一个以 O 点为圆心，r 为半径的圆，O, P, P' 三点共线而且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$，则任何过 P, P' 的圆都是和 Γ 互相正交的。

证明：设 Γ' 是任给一个过 P, P' 的圆，交 Γ 于 $Q_i, i = 1, 2$。由所设，即有

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2 = \overline{OQ_i}^2$$



[图 6–10]

再者，由圆幂定理，

$$\overline{OQ_i}^2 = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \text{由 } O \text{ 到 } \Gamma' \text{ 的切线长平方}$$

亦即 $\overline{OQ_i}$ 和切线等长，所以 Q_i 就是直线 OQ_i 和 Γ' 的唯一交点，即 OQ_i 本身就是一条由 O 到 Γ' 的切线，所以 Γ 和 Γ' 正交于 Q_i。 □

【定义】：对于给定圆 $\Gamma = \odot(O, r)$ 和任意点 $P \neq O$，那个在射线 $\overrightarrow{OP}$ 之上而且满足 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$ 的唯一的 P' 点叫做 P 点对于 Γ 的反射对称点。

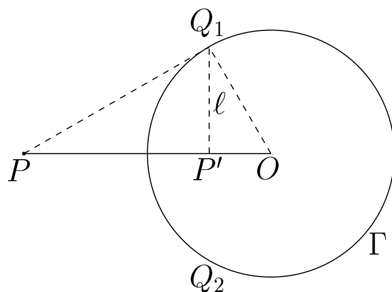
[注]：(i) 当 P 点位于圆 Γ 之上时，其对称点就是其本身，亦即 $P = P'$；反之亦然，即 $P = P' \Leftrightarrow P \in \Gamma$。

(ii) 在平面 Π 上，圆心 O 点对于 Γ 的对称点暂无定义。若我们把平面 Π 添加一个无穷远点 ∞，而且把它定义为和圆心互相对称之点，则一条直线可以当作是过 ∞ 点的圆。在这种看法之下，我们可以证明上述对于 Γ 的反射对称在这个加点平面上是既保圆又保角的。

【例 1】：<u>对称点的作图法</u>

设 P, P' 是一对对于 Γ 成反射对称之点。则 P, P' 和 Γ 之间有如 [图 6–11] 所示的几何结构，即有 $Q_1 \in \Gamma, OQ_1 \perp PQ_1, Q_1P' \perp OP$。由此可见求作对称点的下述作图法：

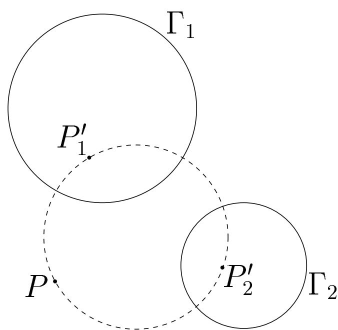
(i) 若 P 点在圆外：连结 OP，以 $\overline{OP}$ 为直径作圆 Γ_1，交 Γ 于 Q_1, Q_2 点，连结 $\overline{Q_1Q_2}$ 交 $\overline{OP}$ 于 P' 点，P' 点即为所求作的 P 点对于 Γ 的对称点。



[图 6–11]

(ii) 若 P' 点在圆内：连结 OP'，过 P' 点作 OP' 垂线 ℓ，交 Γ 于 Q_1, Q_2 点，过 Q_1 点作 OQ_1 的垂线，交 OP' 于 P 点，它即为所求作的对称点。

【例 2】：设 Γ_1, Γ_2 是两个给定的圆，$P \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$，试作一圆 Γ 它过 P 点而且和 Γ_1, Γ_2 都正交。

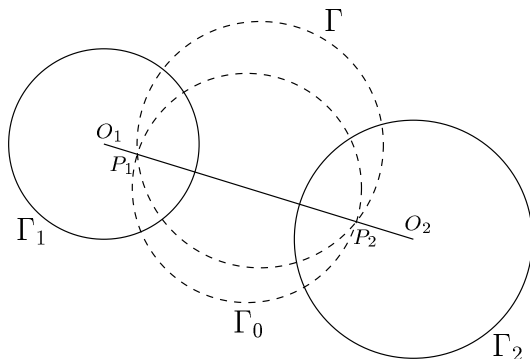


[图 6–12]

解：令 P_1' 和 P_2' 分别是 P 点对于 Γ_1, Γ_2 的反射对称点。则由 P, P_1', P_2' 所定的圆 Γ 即为所求者。[试证上述 Γ 是过 P 点且和 Γ_1, Γ_2 正交的唯一的圆。]

【例 3】：设 Γ_1, Γ_2 是两个相离或相含的圆，亦即 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$，试问在所有和 Γ_1, Γ_2 都正交的圆系中是否有一个唯一的最小者，亦即其半径为极小者？若有，则试讨论其作图法。

解：先讨论相离的情形：



[图 6–13]

如 [图 6–13] 所示，设 Γ 是任给一个正交于 Γ_1, Γ_2 的圆，连结 $\overline{O_1O_2}$，它和 Γ 相交于 P_1, P_2 点，则 P_1, P_2 对于 Γ_1 和 Γ_2 都是互相对称的。即有

$$\overline{O_1P_1} \cdot \overline{O_1P_2} = r_1^2, \quad \overline{O_2P_1} \cdot \overline{O_2P_2} = r_2^2$$

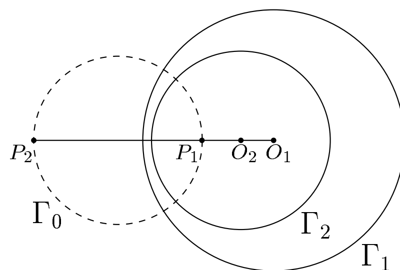
令 $\overline{O_1O_2} = \ell, \overline{O_1P_1} = x, \overline{O_1P_2} = y$，则上述条件就可以改用下述代数联立

方程式加以表达，亦即

$$\begin{cases} xy = r_1^2 \\ (\ell - x)(\ell - y) = r_2^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} xy = r_1^2 \\ x + y = \dfrac{\ell^2 + r_1^2 - r_2^2}{\ell} \end{cases}$$

由此可见，上述交点 P_1, P_2 是唯一确定的（和 Γ 的选取无关）而且可以用轨尺作图求得者。再者，和 Γ_1, Γ_2 正交的圆系也就是过 P_1, P_2 点的圆系，其中半径最小者显然就是那个以 $\overline{P_1P_2}$ 为直径者。

相含情形基本上和上述相离的的情形相似，所不同者只是 P_1, P_2 和 O_1, O_2 之间的相对位置改为 [图 6–14] 所示的情况，其讨论则留作习题。



[图 6–14]

<u>共轴圆系</u>：

设 Γ_1, Γ_2 是给定两个相异的圆，其方程式分别为

$$\Gamma_i: \ x^2 + y^2 + 2D_ix + 2E_iy + F_i = 0, \quad i = 1, 2$$

则以

$$k_1(x^2 + y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1) + k_2(x^2 + y^2 + 2D_2x + 2E_2y + F_2) = 0$$

为其方程式之圆乃是随著比值 $k_1 : k_2$ 之不同而相异。它们组成一个圆系 (family of circles)，称之为由 Γ_1, Γ_2 所产生的<u>共轴圆系</u> (co-axial family of circles)，易见它包含一条直线，亦即 $k_1 : k_2 = -1$ 者，其方程式就是

$$2(D_1 - D_2)x + 2(E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$$

【习题】：

(1) 试验证上述共轴圆系中任何相异的两个圆的等幂轴就是直线

$$2(D_1-D_2)x+2(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$$

[这也就是「共轴」这个名称的来由。]

(2) 设 Γ_1 和 Γ_2 相交于 P, Q 两点，试证上述共轴圆系也就是所有过 P, Q 点的圆所组成者（包括直线 PQ，它其实是就是它们所共有之等幂轴）。

(3) 设 Γ_1 和 Γ_2 相切于 A 点，试证上述共轴圆系也就是共切于 A 点的圆所组成者，而它们的公切线也就是其所共有之等幂轴。

由此可见，共轴圆系是可以分成三类的。第一类是共交于两相异点者，其中不含有点圆；第二类是共切于一点者，其中仅含有一个点圆，即其共切之点； 而第三类是各不相交者，其中含有两个点圆。上一节的[定理 6.4]证明了若 Γ 和共轴圆系中两个圆正交，则 Γ 和它们所产生的共轴圆系中每一个圆皆为正交。其实，我们还可以将结果再作推广如下：

【定理 6.5】：所有和两个定圆 Γ_1, Γ_2 都正交的圆构成一个共轴圆系。

<u>证明</u>：设 $P\notin\Gamma_1\cup\Gamma_2$，令 P', P'' 分别是它对于 Γ_1, Γ_2 的反射对称点，则过 P, P', P'' 的圆就是和 Γ_1, Γ_2 都是正交的。由此可见，和 Γ_1, Γ_2 都正交的圆显然有无穷多个。设 Γ, Γ' 是其中两个相异的成员，由[定理 6.4]得知，由 Γ, Γ' 所生成的共轴圆系中的每一成员都是和 Γ_1, Γ_2 正交的，最後，我们还要说明<u>不可能</u>有上述共轴圆系之外的圆和 Γ_1, Γ_2 都正交。假若可能，设 Γ'' 是一个系外者，则所有其方程能表成下述形式者也都和 Γ_1, Γ_2 正交，即

$$\Gamma+\lambda\Gamma'+\mu\Gamma'',\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

这是和三元一次联立方程式

$$\begin{cases}2(DD_1+EE_1)-(F+F_1)=0\\2(DD_2+EE_2)-(F+F_2)=0\end{cases}$$

中解组 (D, E, F) 中只含有一个任意参数相矛盾。由此可见，对于一个共轴圆系，唯一存在另一个共轴圆系，每一个前者的成员和每一个後者的成员都是互相正交的。这样一对互相正交的共轴圆系称为是互相共轭的 (conjugate)。 □

在例题 §5.4 (4) 的圆幂定理的向量证法中，我们不但证明了 $\overline{PQ_1} \cdot \overline{PQ_2} = \left|\overline{OP}\right|^2 - R^2 =$ 切线长的平方，而且也证明了使得 $(PP'; Q_1Q_2)$ 成调和点列的 P' 恒位于 OP 的一条垂线之上，它和圆心 O 点的距离等于 $R^2/\overline{OP}$。现在让我们改用坐标几何的观点，由圆 Γ 的方程式和 P 点的坐标 (x_0, y_0) 去求得上述直线（称之为圆 Γ 对于 P 点的极线）的方程式。

【定理 6.6】：设圆 Γ 的方程式为

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

而 P 点的坐标为 (x_0, y_0)，则圆 Γ 对于 P 点的极线方程式为

$$x_0x + y_0y + D(x_0 + x) + E(y_0 + y) + F = 0$$

证明：设 $X(x, y)$ 为上述直线 ℓ 上的任给一点，则由圆心 $O(-D, -E)$ 到 X 的向量 $\overrightarrow{OX} = (x + D, y + E)$，而 $\overrightarrow{OP} = (x_0 + D, y_0 + E)$。再者，$\ell$ 和 O, P 的几何关系可以用 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OX} = R^2$ 表达之，即得其代数条件式：

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OX} = (x_0 + D)(x + D) + (y_0 + E)(y + E) = D^2 + E^2 - F$$

亦即

$$x_0x + y_0y + D(x_0 + x) + E(y_0 + y) + F = 0$$

同理亦有球幂定理和球对于 P 点的极面，其有关的讨论则留作习题。

第七章

球面几何和球面三角学

球面乃是空间中最完美匀称的曲面。两个半径相等的球面可以用一个平移把它们叠合起来，而两个半径不相等的球面所相差者就是放大或缩小这种相似变换，由此可见本质性的球面几何可以归纳到单位半径的球面来研讨。再者，在古典天文学的研讨中，观察星星的方向可以用单位球面上的一个点来标记它，而两个方向之间的角度（亦即方向差）则相应于单位球面上两点之间的球面距离 (spherical distance)。这也就是为什麼古希腊天文学和几何学总是合为一体的，而且古希腊的几何学家对于球面三角学 (spherical trigonometry) 的投入程度要远远超过他们对于平面测量学的兴趣，因为「量天的学问」才是他们所致力去理解者；它的确比丈量土地、计量财产等更引人入胜，是不？

从现代的观点来看，球面几何乃是空间几何中蕴含在正交子群的部分，而向量几何则是空间几何中蕴含在平移子群的部分，而且两者又密切相关、相辅相成，例如向量运算都是正交协变的 (orthogonal covariant)，所以向量代数又是研讨球面几何的简明有力的利器。

7.1 单位球面的基本性质

设 O 为球面的心，而单位球面 $S^2(1)$ 则是空间 $\mathfrak{U}$ 中所有和 O 点的距离为 1 的点所成的点集，即：

$$S^2(1) = \{A \in \mathfrak{U}, \overline{OA} = 1\}$$

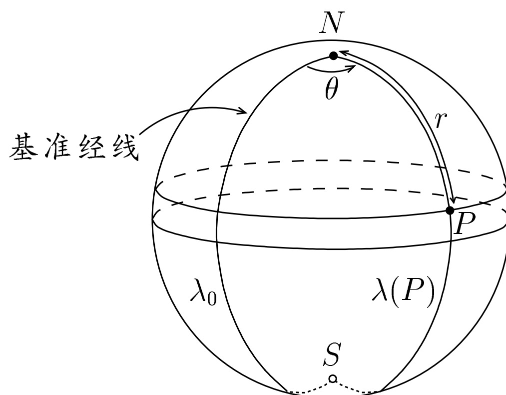
它是以 O 为其定点的正交子群的一个轨道 (orbit)。

(i) 反射对称性：设 Π 是一个过球心 O 点的平面，则显然有 $\mathfrak{R}_\Pi$ 保持 O 点不动。由 $\mathfrak{R}_\Pi$ 的保长性可见它把和 O 点相距为 1 的点变换成和 O 点相距为 1 之点，所以 $\mathfrak{R}_\Pi\big(S^2(1)\big) = S^2(1)$。再者，$\mathfrak{R}_\Pi$ 在 $S^2(1)$ 上的定点子集就是 $S^2(1)\cap\Pi$ 这一个大圆 (great circle)，我们将把 $\mathfrak{R}_\Pi$ 限制在 $S^2(1)$ 上的变换叫做以大圆 $S^2(1)\cap\Pi$ 为定点子集的球面反射对称。

(ii) 旋转对称性：设 ℓ 是一条过球心 O 点的直线，它和球面 $S^2(1)$ 的交点是球面上的两个互为对顶的点 A, A'（一如南、北两极）；换言之，球面上两点 A, A' 互为对顶 (antipodal) 的条件是 $\overline{AA'}$ 以球心为其中点。在空间以 ℓ 为轴的旋转之下，球心 $O\in\ell$ 是固定不动的；同理可见 $S^2(1)$ 也是它的一个不变子集，而它限制在球面上的变换乃是一个以对顶点 $\{A, A'\}$ 为其定点子集的球面旋转对称（如日常地球所作者就是一个以南北极为其定点子集的旋转）。

球面极坐标：

设 $\{N, S\}$ 是单位球面上给定的两个互相对顶之点，在以 $\{N, S\}$ 为定点子集的球面旋转之下，每点的「纬度」保持不变，而其「经度」则随著转角而增加，如 [图 7–1] 所示。设 P 是球面上相异于两个极点者，令 $\lambda(P)$ 是过 P 点的那条经线 (longitude arc)，λ_0 是选定的基准经线。设 r 为 N 到 P 的球面距离，亦即 $\widehat{NP}$ 这一段「经弧」的弧长，θ 是 λ_0 转到 $\lambda(P)$ 的（有向）转角，则称 (r, θ) 为 P 点对于以 N 为基点的球面极坐标 (spherical polar coordinates)。



[图 7–1]

若在空间选取正交坐标系，以球心为原点，以 $\overrightarrow{ON}$ 为 z–轴的方向，以 $\overrightarrow{OE}$ 为 x–轴的方向，其中 E 点乃是基准经线 λ_0 的中点，则有：

$$x = \sin r \cos\theta,\ y = \sin r \sin\theta,\ z = \cos r$$

[注]：由直接的微分计算可得

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + \sin^2 r d\theta^2$$

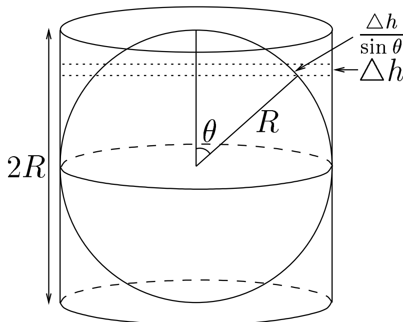
用上述弧长的微分式，不难证明经弧 $\overparen{NP}$ 乃是球面上连结 N, P 两点的最短曲线（亦称测地线 (geodesics)）。

【阿基米德定理】：半径为 R 的球面面积等于

$$4\pi R^2$$

[注]：阿基米德 (Archimedes, 287–212 B.C.) 是公认的古希腊时代伟大的科学家和几何学家，他一生有很多卓越的贡献；而他最引以自豪者，首推上述定理及其简洁的证明，这也就是尊照他本人的遗嘱刻在他的墓碑上者。

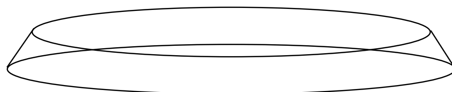
<u>证明</u>：其证明的要点在于论证一个半径为 R 的球面面积和一个高为 $2R$，半径为 R 的圆柱面面积相等。而在他的墓碑上所刻划的，就是如 [图 7–2] 所示把两者放在相切同高的位置。



[图 7–2]

设想用一系列和柱面正交的平行平面，把两个面都细分成很窄很窄的一圈圈。设相邻两个平行面之间的距离是 Δh，则柱面上的窄条（或圈）的面积等于 $2\pi R\Delta h$，而在球面上的相应窄圈，虽然其宽度和长度

会随著 θ 而改变，但在 Δh 非常、非常小的时候，它可以看成如 [图 7–3] 所示的圆台之侧面：



[图 7–3]

其中环长度是 $2\pi R\sin\theta$，亦即其环长的平均值是 $2\pi R\sin\theta$，而侧面的宽度则为 $\frac{\Delta h}{\sin\theta}$，所以其面积的高度近似值也是 $2\pi R\Delta h$（亦即可能的误差肯定在 Δh^2 这种量级）。由此他就用 Eudoxus 所创的逼近原理证明了两者的面积必然相等，而後者的面积显然等于高为 $2R$，长为 $2\pi R$ 的长方形面积，亦即 $4\pi R^2$。 □

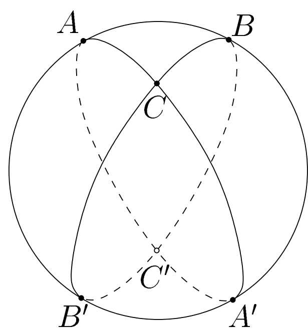
<u>球面三角形面积公式</u>：

设 A, B, C 是球面上任取三点但不含对顶者，令 $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ 为连结于点与点之间的测地线，称之为球面三角形 $\triangle ABC$ 的三个边。我们将采用和平面三角学中相同的符号体系，以 A, B, C 表示 $\triangle ABC$ 在三个顶点的内角，及以 a, b, c 表示 $\triangle ABC$ 的各角对边边长。在平面几何中，一个三角形的三个内角和恒等于一个平角，这是逻辑等价于平行公理的基本事实，也是平面的平直性的一种基本表达；在球面三角形的情形下，三内角之和则恒大于一个平角，而下述[定理 7.1]证明在单位球面上的球面三角形，其内角和与 π 的差额（称之为「角盈」）其实恰好等于其面积。

【定理 7.1】：在单位球面上，一个球面三角形 $\triangle ABC$ 的面积就是

$$\triangle ABC = A + B + C - \pi$$

<u>证明</u>：如 [图 7–1] 所示，由二个夹角为 θ 的经线所围成的球面部分，其面积显然和 θ 成正比（这是球面对以 N, S 为定点的旋转对称性的直接推论）。再者，当 $\theta = 2\pi$ 时，其面积等于 4π（阿基米德定理）！所以上述以 θ 为夹角者（称之为 spherical lune）的面积等于 2θ。



[图 7–4]

如 [图 7–4] 所示，令 A', B', C' 分别是 A, B, C 的对顶者。用上述 spherical lune 的面积公式即得：

$$\triangle ABC + \triangle A'BC = 2A\,,$$
$$\triangle ABC + \triangle AB'C = 2B\,,$$
$$\triangle ABC + \triangle ABC' = 2C\,,$$
$$\triangle ABC' = \triangle A'B'C\,,\ \text{（互为对顶者，当然等面积）}$$
$$\triangle ABC + \triangle A'BC + \triangle AB'C + \triangle A'B'C = 2\pi, \quad \text{（半球面积）}$$

由此可得

$$2\triangle ABC + 2\pi = 2A + 2B + 2C$$

亦即

$$\triangle ABC = A + B + C - \pi$$ □

[注]：上述具有基本重要性的球面三角形面积公式其实就是阿基米德球面面积公式的局部化和精细化。

<u>球面三角形的叠合条件及等腰三角形定理</u>：

设 A, B 是球面上任给两点。在空间中和 A, B 等距的点集是直线段 $\overline{AB}$ 的垂直平分面 Π_1，它当然包含球心 O，所以和 A, B 等距的球面上之点乃是 $\Pi_1 \cap S^2(1)$ 这个大圆，而球面对于这个大圆的反射对称将 A, B 互换。用上述球面上的反射对称即可推导出：

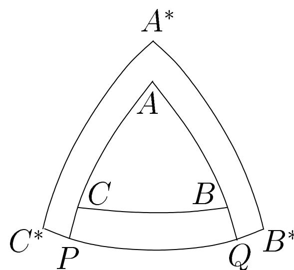
(i) S.A.S. 也是球面三角形的叠合条件；

(ii) 球面等腰三角形的两底角相等；反之，两底角相等的球面三角形亦必为等腰。

再者，由上述两点还可以同样地推导出球面三角形也具有其他如 S.S.S. 和 A.S.A. 等叠合条件。在此值得一提的是 A.A.A. 也是球面三角形的一个叠合条件，我们可以用球面三角形中所特有的<u>对偶关系</u>来推导它也是一个叠合条件。设 A, A' 互为对顶，则和 A, A' 等距的球面上的点集就是和 A, A' 的距离是 $\pi/2$ 的那个大圆，将以 Γ_A 记之。设 $\triangle ABC$ 是一个任给球面三角形，在下述三对对顶点偶（即 $\Gamma_B \cap \Gamma_C, \Gamma_C \cap \Gamma_A, \Gamma_A \cap \Gamma_B$）之中，分别取其靠近 A, B, C 者，以 A^*, B^*, C^* 记之，则称 $\triangle A^*B^*C^*$ 为 $\triangle ABC$ 的对偶球面三角形（ $\triangle ABC$ 也是 $\triangle A^*B^*C^*$ 的对偶球面三角形）。

【引理 7.1】：令 a, b, c 和 a^*, b^*, c^* 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A^*B^*C^*$ 的各角对边边长，则有：

$$a^* = \pi - A, \quad b^* = \pi - B, \quad c^* = \pi - C$$
$$a = \pi - A^*, \quad b = \pi - B^*, \quad c = \pi - C^*$$



[图 7–5]

<u>证明</u>：我们只需要证明其中之一，其馀各式皆可同理类推。由[图 7–5] 所示，在大圆 Γ_A 上 $\overset{\frown}{B^*P} = \overset{\frown}{C^*Q} = \pi/2, \overset{\frown}{PQ} = A$，故有

$$a^* = \overset{\frown}{B^*P} + \overset{\frown}{C^*Q} - \overset{\frown}{PQ} = \pi - A \qquad \square$$

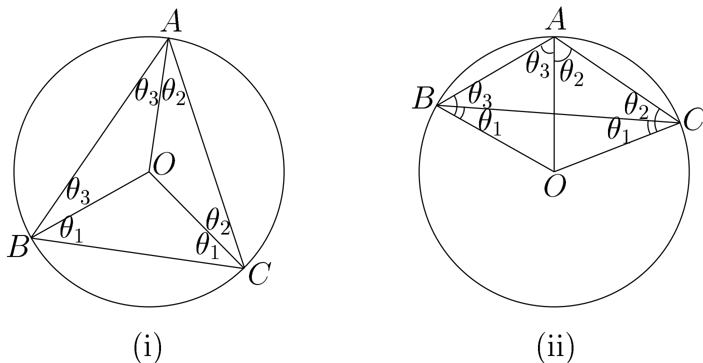
【推论】： A.A.A. 也是一种球面三角形的叠合条件。

<u>证明</u>：设 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三角内角对应相等，由[引理 7.1]得知它们的对偶球面三角形 $\triangle A_1^*B_1^*C_1^*$ 和 $\triangle A_2^*B_2^*C_2^*$ 的三个边长对应等长，所以是全等的，因此当然有三个对应内角相等。再用[引理 7.1]，即得 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 满足 S.S.S. 全等条件。 $\square$

【引理 7.2】：设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'BC$ 的顶点共圆而且 A, A' 同在 $\overset{\frown}{BC}$ 的一侧，则

$$\angle ABC + \angle ACB - \angle A = \angle A'BC + \angle A'CB - \angle A'$$

再者，上述之逆命题也成立。



[图 7–6]

证明：如 [图 7–6(i)] 所示，$\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$ 皆为等腰，所以其底角相等，设其分别是 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$。则有

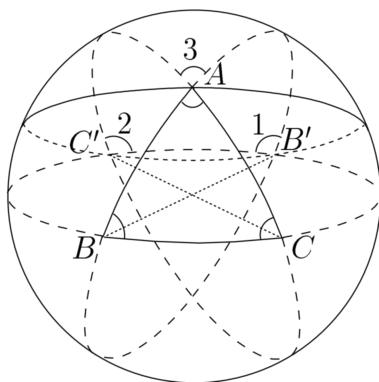
$$\angle ABC + \angle ACB - \angle A = 2\theta_1$$

同理亦有

$$\angle A'BC + \angle A'CB - \angle A' = 2\theta_1$$

[图 7–6(ii)] 的情况和逆命题的证明留作习题。 □

【定理 7.2】(Lexell)：设球面三角形 $\triangle A_1BC$ 和 $\triangle A_2BC$ 具有相等的定向面积，而 B', C' 分别是 B, C 的对顶点，则 B', C', A_1, A_2 四点共圆。



[图 7–7]

<u>证明</u>：如 [图 7–7] 所示：

$$\angle 1 = \pi - B,\ \angle 2 = \pi - C,\ \angle 3 = A$$

所以

$$\angle 1 + \angle 2 - \angle 3 = \pi - \triangle ABC$$

分别取 $A = A_1$ 和 A_2，再对 $\triangle A_1B'C'$ 和 $\triangle A_2B'C'$ 运用[引理 7.2]的逆命题，即得 B', C', A_1, A_2 共圆。 □

【习题】：

(1) 设 P_1, P_2 的球面极坐标分别是 $(r_1, 0)$ 和 $(r_2, 0)$，而 $\gamma(t) = \big(f(t), g(t)\big)$ 是一条一阶可微曲线，$a \le t \le b$, $\gamma(a) = (r_1, 0)$, $\gamma(b) = (r_2, 0)$。试证其长度至少等于 $|r_1 - r_2|$。

(2) 若 $\triangle ABC$ 是一个半径为 R 的球面三角形，试问 $A + B + C - \pi$ 和其面积之间的关系是什麼？并试证你的主张。

(3) 设 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 是满足 S.A.S. 条件的两个球面三角形，例如 $A_1 = A_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$。试构造一系列球面上的反射对称，它们的组合恰好把 $\triangle A_1B_1C_1$ 变换到 $\triangle A_2B_2C_2$。

(4) 试用球面的反射对称性证明等腰三角形的底角相等，而顶角平分线垂直平分底边。

(5) 试用上述 (3), (4) 所证得者，证明 S.S.S. 也是球面三角形的一种全等条件。

(6) 设 O 为一个球面的心，A 为球面上任给一点，Π 为过 A 点而且和 $\overline{OA}$ 垂直的平面。试证 Π 和球面仅仅交于 $\{A\}$ 点。

(7) 设 Γ 是极坐标下「$r=$ 常数」所构成的纬圆。试求 Γ 上任一点 P 的切平面和直线 ON 的交点 V（亦即确定 $\overline{OV}$ 的长度）。

7.2 球面三角学

球面三角学研讨球面三角形的各种各样几何量如边长、角度、面积、外接圆和内切圆的半径等等的相互关系。远在古希腊时代，球面三角学即已倍加重视。Menelous 所著的 “Sphaerica” 和 Ptolemy 所著的 “Almagest” 总结了当年在球面三角学上的研究成果和它们在天文学上的应用。大体上，他们已经充分理解了<u>直角</u>球面三角形的各种几何量之间的相互关系；然後一直到十八世纪，球面三角学的研究才又得以蓬勃开展。

在本节的讨论中，将以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 等等表示单位球面上给定点 A, B, C 等等的位置向量，亦即 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$ 等等，它们当然都是单位长的向量。由此可见，从向量几何的观点来看，球面几何其实也就是单位长向量的几何。

由向量运算的几何内含，即有（参看 [图 7–8]）：

(i) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\cos a$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=\cos b$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos c$；

(ii) $/\!/(\mathbf{b},\mathbf{c})$, $/\!/(\mathbf{c},\mathbf{a})$, $/\!/(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的面积，亦即 $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$, $|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|$, $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$，分别等于 $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$；

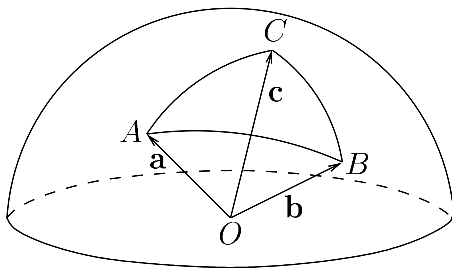
(iii) 球面三角形 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 等于 $/\!/(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $/\!/(\mathbf{a},\mathbf{c})$，$/\!/(\mathbf{b},\mathbf{a})$ 和 $/\!/(\mathbf{b},\mathbf{c})$，$/\!/(\mathbf{c},\mathbf{a})$ 和 $/\!/(\mathbf{c},\mathbf{b})$ 之间的两面角；

(iv) 设 $V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}>0$，以後将以 D 表示之。由行列式的乘

法公式即有：

$$D^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 2\cos a\cos b\cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c$$



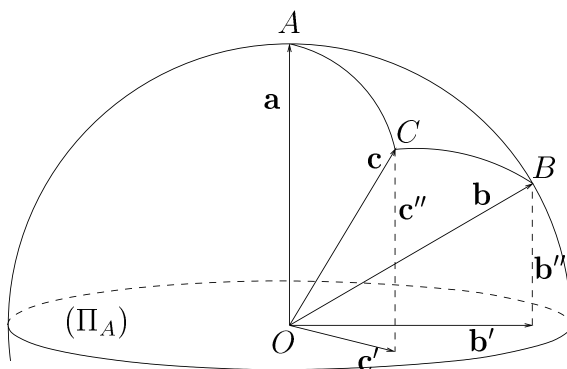
[图 7–8]

【定理 7.3】（球面三角正弦定律）：

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{D}{\sin a \sin b \sin c}$$

证明：令 Π_A 为过球心 O 点而和 $\overrightarrow{OA}$ 垂直的平面，$\mathbf{b}'$ 和 $\mathbf{c}'$ 是 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 在 Π_A 上的垂直投影，亦即：

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}'', \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}' + \mathbf{c}''$$

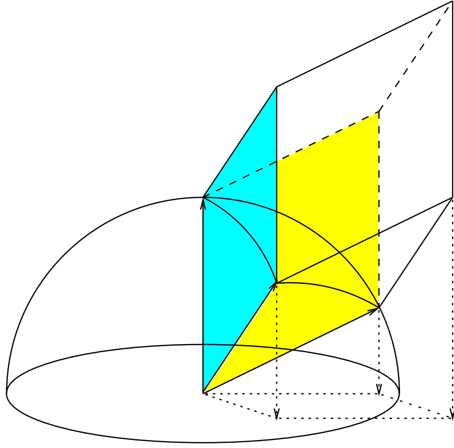


[图 7–9]

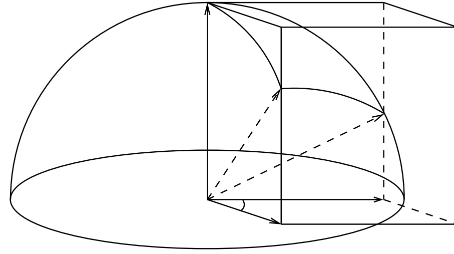
其中 $\mathbf{b}', \mathbf{c}'$ 和 $\mathbf{a}$ 垂直而 $\mathbf{b}''$ 和 $\mathbf{c}''$ 则为 $\mathbf{a}$ 的倍积，所以由内积和 $\times$–积的分配律，得：

$$\begin{aligned} D &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}') + \text{为 } 0 \text{ 之三项} \\ &= |\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'| = |\mathbf{b}'|\cdot|\mathbf{c}'|\cdot\sin A \\ &= \sin c \sin b \sin A \end{aligned}$$

上述所作的垂直投影其实是把由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 所张的平行六面体沿 $\mathbf{a}$ 的方向滑动，最後得出由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ 所张的长方体，如下图所示：



[图 7–10(i)]



[图 7–10(ii)]

因为体积是斜移不变的，由此亦可以看到

$$D = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}') = \sin c \sin b \sin A$$

由此易见

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{D}{\sin a \sin b \sin c} \qquad \square$$

【定理 7.4】（球面三角馀弦定律）：

$$\begin{aligned} \sin b \sin c \cos A &= \cos a - \cos b \cos c \\ \sin c \sin a \cos B &= \cos b - \cos c \cos a \\ \sin a \sin b \cos C &= \cos c - \cos a \cos b \end{aligned}$$

<u>证明</u>：由面积的勾股定理，即有：

$$(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos a & \cos c \\ \cos b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \cos a - \cos b\cos c$$

再者，由内积 ×–积的几何意义，以及 A 等于 $//(\mathbf{c},\mathbf{a})$ 和 $//(\mathbf{b},\mathbf{a})$ 之间的两面角，即有：

$$\begin{aligned}(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) &= |\mathbf{c}\times\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}\times\mathbf{a}|\cos A \\ &= \sin b\sin c\cos A\end{aligned}$$

□

<u>球面三角馀弦定律的另一证法</u>：

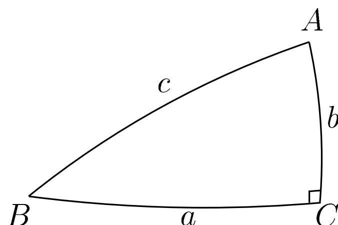
$$\begin{aligned}\sin c\sin b\cos A &= \mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}' \\ &= \big(\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}\big)\cdot\big(\mathbf{c}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}\big) \\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\cdot 1 \\ &= \cos a-\cos b\cos c\end{aligned}$$

□

【推论 1】：在 $C=\frac{\pi}{2}$（亦即直角球面三角形）时，则有：

(i) $\cos c=\cos a\cos b,\ \ \sin A=\dfrac{\sin a}{\sin c},\ \sin B=\dfrac{\sin b}{\sin c}$;

(ii) $\cos A=\dfrac{\tan b}{\tan c},\ \ \cos B=\dfrac{\tan a}{\tan c},\ \ \tan A=\dfrac{\tan a}{\sin b},\ \ \tan B=\dfrac{\tan b}{\sin a}$.



[图 7–11]

证明：由所设 $C=\dfrac{\pi}{2}$ 即有 $\cos C=0, \sin C=1$。所以 (i)–式乃是正、馀弦定律的直接结论。再者，

$$\begin{aligned}\sin b \sin c \cos A &= \cos a - \cos b \cos c \\ &= \cos a - \cos^2 b \cos a = \sin^2 b \cos a\end{aligned}$$

所以

$$\cos A = \frac{\sin b \cos a}{\sin c} = \frac{\tan b \cos b \cos a}{\sin c} = \frac{\tan b \cos c}{\sin c} = \frac{\tan b}{\tan c}$$

[其他三式的证明留作习题。]

半角公式：

在平面三角学中，我们有下述易算好用的半角公式，即令 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，则有：

$$\begin{aligned}\cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \text{ etc.} \\ \sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \text{ etc.} \\ \tan\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \text{ etc.} \\ \text{面积 } \triangle &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ \text{内切圆半径 } r &= \frac{\triangle}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\end{aligned}$$

在球面三角学中，也有类似的半角公式，即：

【推论 2】（球面三角半角公式）：

$$\begin{aligned}
\cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},\ \text{etc.}\\
\sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}},\ \text{etc.}\\
\tan\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}},\ \text{etc.}\\
\tan r &= \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}
\end{aligned}$$

证明：以 $\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$（或 $1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$）代入馀弦定律，即得：

$$\begin{aligned}
2\sin b\sin c\cos^2\frac{A}{2} &= \cos a - \cos b\cos c + \sin b\sin c\\
&= \cos a - \cos(b+c)\\
&= 2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)
\end{aligned}$$

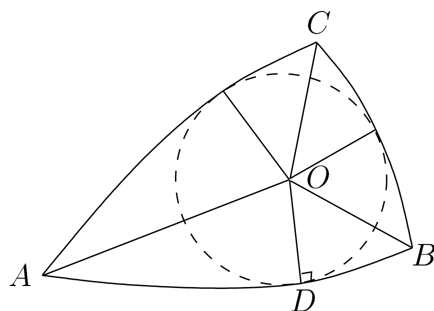
或

$$\begin{aligned}
2\sin b\sin c\sin^2\frac{A}{2} &= -\cos a + \cos b\cos c + \sin b\sin c\\
&= \cos(b-c) - \cos a\\
&= 2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)
\end{aligned}$$

这也就证明了 (i) 和 (ii)，而 (iii) 则是 (i), (ii) 的直接推论。兹证 (iv)–式如下：

如 [图 7–12] 所示，$\triangle ADO$ 是直角球面三角形，$\overset{\frown}{AD} = s - a$, $\angle OAD = \frac{A}{2}$，所以

$$\frac{\tan r}{\sin(s-a)} = \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-1)}} \Rightarrow \text{(iv)} \qquad \square$$



[图 7–12]

阿基米德定理以及它的局部化——球面三角形面积公式：

$$\triangle = A + B + C - \pi$$

是球面几何中至关重要的基本定理。从纯几何的观点，上述面积公式已经是十分简洁完美的了；但是从向量代数的不变量理论来看，我们还需要把三角形面积和 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 的基本正交不变量，亦即 $\{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c},\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\} = \{\cos c,\ \cos a,\ \cos b\}$ 之间整理出一个简洁、整体的关系式。当然，我们可以用球面三角馀弦定律，即

$$\sin a \sin b \cos C = \cos c - \cos a \cos b \quad \text{等等}$$

得出

$$C = \cos^{-1}\left\{\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\right\} \quad \text{等等}$$

所以这个用向量内积的面积公式当然就可以写成：

$$\begin{aligned}\triangle = \cos^{-1}\left\{\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right\} + \cos^{-1}\left\{\frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}\right\} \\ + \cos^{-1}\left\{\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\right\} - \pi\end{aligned}$$

但是这样一个繁复的表式显然不好用，因此有必要去探讨上述球面三角形面积的内积表达式背後的精简形式。这种精益求精的所得就是：

【定理 7.5】：$\tan\dfrac{\triangle}{2} = \dfrac{D}{u}$, $D = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) > 0$, $u = 1 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$.

证明：由球面三角正弦、馀弦定律（亦即[定理 7.3]、[定理 7.4]）即有

$$\sin A = \frac{D}{\sin b \sin c}, \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

等等直接代换和代数计算可得：

$$\begin{aligned}\sin\triangle &= \sin(A+B+C-\pi) = -\sin(A+B+C)\\ &= \frac{D}{\prod \sin^2 a}\left\{D^2 + \sum \cos a \cos^2 b - \sum \cos a \cos b - (u-1)\cdot \prod \cos a\right\}\end{aligned}$$

上式之分母为

$$\prod(1-\cos^2 a) = \prod(1+\cos a)\prod(1-\cos a)$$

而一个令人惊喜的事实是括号内 $\{D^2 + \ldots\}$ 的代数表式可以简化成 $u \cdot \prod(1-\cos a)$。所以即得：

$$\sin\triangle = \frac{Du}{\prod(1+\cos a)} = \frac{2Du}{D^2+u^2}$$

同样的代数计算可得

$$\cos\triangle = \frac{u^2 - D^2}{u^2 + D^2}$$

所以

$$\tan\frac{\triangle}{2} = \frac{\sin\triangle}{1+\cos\triangle} = \frac{D}{u}$$

□

[注]：在直角球面三角形，即 $C = \frac{\pi}{2}$ 时，尚有下述特殊公式，即：

$$\begin{aligned}\cos\triangle &= \cos\left(A + B - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(A+B)\\ &= \frac{1}{\sin c \tan c}\left\{\sin a \tan a + \sin b \tan b\right\} = \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c}\end{aligned}$$

【推论 1】：若将 $\triangle ABC$ 的两边 a, b 固定而让第三边 c 变动，令

$$c_1 = \cos a, \ c_2 = \cos b, \ x = 1 + \cos c, \ \varphi = \angle C$$

则有

$$\frac{d\triangle}{dx} = \frac{c_1+c_2-x}{xD}$$
$$\frac{d\triangle}{d\varphi} = \frac{x-c_1-c_2}{x}$$

证明：由上所设，

$$u = c_1+c_2+x$$
$$D^2 = -(c_1+c_2)^2+2(c_1c_2+1)x-x^2$$

将 $\tan\frac{\triangle}{2}=\frac{D}{u}$ 对于 x 求微分，即

$$\frac{d\triangle}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\tan^{-1}\frac{D}{u}\right) = \frac{uD'-D}{\frac{1}{2}(u^2+D^2)} = \frac{uDD'-D^2}{(1+c_1)(1+c_2)xD}$$

在这里，有趣的是分子也含有 $(1+c_1)(1+c_2)$ 因式。约分後即得

$$\frac{d\triangle}{dx} = \frac{c_1+c_2-x}{xD}$$

再者，将下述馀弦定律

$$\sin a\sin b\cos\varphi = x-1-c_1c_2$$

对于 x 微分，即有

$$-\sin a\sin b\sin\varphi\frac{d\varphi}{dx} = -D\frac{d\varphi}{dx} = 1$$

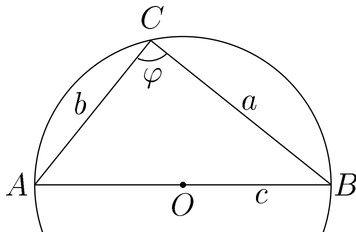
所以

$$\frac{d\triangle}{d\varphi} = \frac{d\triangle}{dx}\frac{dx}{d\varphi} = \frac{x-c_1-c_2}{x}$$ □

[注]：当 φ 从 0 变到 π，$\triangle=\triangle(\varphi)$ 的变化有下述三种情形，即：

(i) 若 $a+b<\pi$，则 $c_1+c_2>0$，而其对边 c 则从 $|a-b|$ 变到 $a+b$，函数值 $\triangle(\varphi)$ 由 0 增加到其在 $x=c_1+c_2$ 时的唯一极大值，然後再递减到 0。

[注]：$x=c_1+c_2$，即 $1+\cos c=\cos a+\cos b$ 的几何意义乃是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心位于 $\overset{\frown}{AB}$ 之上，如 [图 7–13] 所示。其证明在讨论球面四边形时便会详细说明。



[图 7–13]

(ii) 若 $a+b>\pi$，则 $c_1+c_2<0$；其第三边 $c(\varphi)$ 则由 $|a-b|$ 增加到 $2\pi-(a+b)$。因为 $\dfrac{d\triangle}{d\varphi}$ 一直是正的，$\triangle(\varphi)$ 由 0 递增到 2π，亦即 $\triangle ABC$ 以半个球面为其上限。

(iii) 若 $a+b=\pi$，则 $c_1+c_2=0$；其第三边 $c(\varphi)$ 则由 $|a-b|$ 增加到 π，而 $\triangle(\varphi)$ 则由 0 递增到 π，亦即 $\triangle ABC$ 以四分之一球面为其上限。

【推论 2】：设球面三角形 $\triangle ABC$ 的三边边长中 c 和 $a+b$ 保持不变，则 $\triangle ABC$ 的面积是 $|a-b|$ 的递减函数。

证明：令 $A=\cos\frac{a+b}{2}$, $K=1+\cos c$, $t=\cos\frac{a-b}{2}$，则有：

$$\begin{aligned}
u &= \cos a+\cos b+\cos c+1 = 2At+K \\
D^2+u^2 &= 2(1+\cos a)(1+\cos b)(1+\cos c) = 2K(A+t)^2 \\
D^2 &= (K-2A^2)(2t^2-K) \\
\frac{d\triangle}{dt} &= \frac{D'u-Du'}{\frac{1}{2}(u^2+D^2)} = \frac{DD'u-D^2u'}{\frac{1}{2}(u^2+D^2)D} = \frac{2(K-2A^2)}{D(A+t)} > 0
\end{aligned}$$

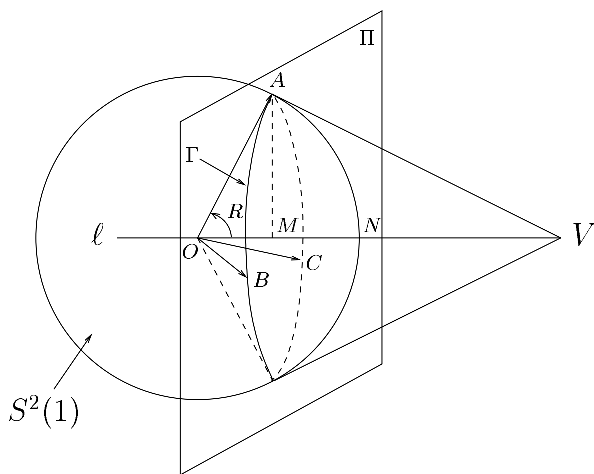
上式中 $\frac{d\triangle}{dt} > 0$ 是因为

$$K - 2A^2 = 1 + \cos c - 2\cos^2\frac{a+b}{2} = \cos c - \cos(a+b)$$
$$= 2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c) > 0\,,$$
$$A + t = \cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{a-b}{2} = 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} > 0$$

由此可见，面积 $\triangle(t)$ 是 t 的递增函数，亦即是 $|a-b|$ 的递减函数。 □

<u>球面三角形的外接圆</u>：

一个球面三角形 $\triangle ABC$ 的外接圆是由 A, B, C 三点所定的平面 Π 和球面的交集，而它也是平面三角形 $\triangle' ABC$ 在平面 Π 中的外接圆，如 [图 7–14] 所示：



[图 7–14]

令 M 为在 Π 上 Γ 的圆心， N 为在球面上 Γ 的圆心，$\ell = OM$。易证 OM 和 Π 垂直，而且 $N \in \ell$。 [证明留作习题]

由此可见，平面 Π 和圆 Γ 是在以 ℓ 为轴的旋转之下的不变子集 (invariant subsets)，设球面在 A 点的切面 T_A 交 ℓ 于 V 点，由上述旋转不变性可见球面在 Γ 上任给一点 P 的切面 T_P 也过 V 点。

【定理 7.6】：

$$\overrightarrow{OV} = \frac{1}{D}(\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathbf{c} + \mathbf{c}\times\mathbf{a})$$

证明：设 $T_A \cap \ell = \{V\}$。由所设 ℓ 过球心 O 而且和 Π 正交，所以 $S^2(1)$ 和 Π 在以 ℓ 为轴的旋转下都是不变子集，因此 $\Gamma = S^2(1) \cap \Pi$ 也当然是不变子集。设 P 为 Γ 上任给一点，则有一个 ℓ–轴旋转 ρ，它把 A 点移动到 P 点，易见 $\rho(T_A) = T_P$，而 ρ 是保持 ℓ 每一点固定不动的，所以 $T_P \cap \ell = \rho(T_A \cap \ell) = \rho(V) = V$。

再者，$T_A \cap T_B \cap T_C$ 只含有一个点，所以 V 其实就是 $\{T_A, T_B, T_C\}$ 的共交点。由此可见：

$$\overrightarrow{OV} \cdot \mathbf{a} = 1\,,\ \overrightarrow{OV} \cdot \mathbf{b} = 1\,,\ \overrightarrow{OV} \cdot \mathbf{c} = 1$$

而且 $\overrightarrow{OV}$ 是唯一能够满足上述三个等式的向量。由直接验算可知：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{a} &= \frac{1}{D}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = 1\\
\frac{1}{D}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} &= \frac{1}{D}(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = 1\\
\frac{1}{D}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c} &= \frac{1}{D}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = 1
\end{aligned}$$

所以它必然是 $\overrightarrow{OV}$。 □

【推论 1】：单位球面上四点 $\{A, B, C, D\}$ 共圆的充要条件是它们的位置向量 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ 满足

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} + (\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{d} - (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d} - (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{d} = 0$$

证明：由上述讨论，D 位于 $\triangle ABC$ 的外接圆的充要条件乃是 T_D 也过 V 的，即 $\overrightarrow{OV}\cdot\mathbf{d} = 1$，亦即：

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} - (\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{d} = 0$$ □

【推论 2】：设 R 为球面上 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，亦即 [图 7–14] 中之 $\overset{\frown}{AN}$ 的弧长，则有：

$$\tan^2 R = \frac{2}{D^2}(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c)$$

证明：如 [图 7–14] 所示，

$$\begin{aligned}\tan^2 R &= \overline{OV}\cdot\overline{OV}-1\\ &= \frac{1}{D^2}\big\{4(1+w)-u^2-D^2\big\}\\ &= \frac{2}{D^2}(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c)\end{aligned}$$

其中 $w=\cos a\cos b+\cos b\cos c+\cos c\cos a$。 □

球面四边形 (spherical quadrilaterals)：

一如在平面的情形，两个三角形若其三边对应等长则为全等，但是两个四边形若其四边对应等长仍然是可能不全等的；即使在凸的情况，还是需要加上其一个对应对角线等长，才能完全确定其叠合性。设 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$ 是一个球面四边形的顶点的位置向量，它们共有六个交叉内积，亦即是其四个边长和两个对角线长的馀弦，它们之间具有一个函数关系，由此可以从给定其中五个之值去确定其第六个之值。我们可以用平行六面体定向体积（亦即行列式）的乘法公式来求得这种函数关系式，即：

$$[V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})]^2\cdot[V(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})]^2=[V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot V(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})]^2$$

两边分别用行列式乘法公式计算，即得：

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{d}\cdot\mathbf{a}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{d}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{d}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}^2$$

若以

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}=1\\ &\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos\ell_1,\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\cos\ell_2,\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=\cos\ell_3,\ \mathbf{d}\cdot\mathbf{a}=\cos\ell_4\\ &\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\cos d_1,\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}=\cos d_2\end{aligned}$$

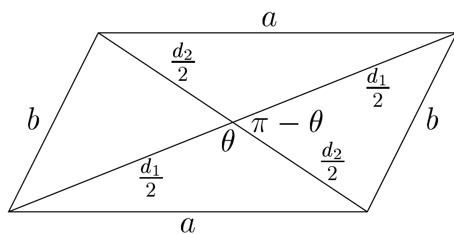
代入即为：

$$\begin{vmatrix}1 & \cos\ell_1 & \cos d_1\\ \cos\ell_1 & 1 & \cos\ell_2\\ \cos d_1 & \cos\ell_2 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & \cos d_1 & \cos\ell_4\\ \cos d_1 & 1 & \cos\ell_3\\ \cos\ell_4 & \cos\ell_3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \cos\ell_1 & \cos d_1\\ \cos d_1 & \cos\ell_2 & 1\\ \cos\ell_4 & \cos d_2 & \cos\ell_3\end{vmatrix}^2$$

上述是一般情形的普遍关系式，若在 $\ell_1 = \ell_3 (= a)$, $\ell_2 = \ell_4 (= b)$，亦即二对对边各别等长的特殊情形，则上述关系式可以大为简化，其结果为

$$(1 + \cos d_1)(1 + \cos d_2) = (\cos a + \cos b)^2$$

[注]：在平面几何中，两对对边各别等长的四边形就是平行四边形，因此这种球面四边形也可以看成平行四边形在球面几何中的推广（虽然「平行」这个名称实在已经名不符实的了！）。其实，这种球面四边形除了没有两对对边互相平行这个性质之外，也具有平行四边形的其他性质，例如其对角线互相平分、两对对角各别相等 [证明留作习题]。再者，我们也可以用对角线互相平分来直接验证上述关系式：



[图 7–15]

如 [图 7–15] 所示，即有馀弦定律公式：

$$\sin\frac{d_1}{2}\sin\frac{d_2}{2}\cos\theta = \cos a - \cos\frac{d_1}{2}\cos\frac{d_2}{2}$$
$$\sin\frac{d_1}{2}\sin\frac{d_2}{2}\cos(\pi-\theta) = \cos b - \cos\frac{d_1}{2}\cos\frac{d_2}{2}$$

两式相加，即得

$$0 = (\cos a + \cos b) - 2\cos\frac{d_1}{2}\cos\frac{d_2}{2}$$

亦即

$$(\cos a + \cos b)^2 = (1 + \cos d_1)(1 + \cos d_2)$$

再者，上述四边形顶点共圆的充要条件是 $d_1 = d_2 = d$，亦即

$$\cos a + \cos b = 1 + \cos d$$

由此可见，[定理 7.5]的[推论 1]中 $\frac{d\triangle}{d\varphi} = 0$ 的条件式：

$$c_1 + c_2 - x = \cos a + \cos b - (1 + \cos c) = 0$$

其几何意义是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心位于 $\widehat{AB}$ 之上。[在平面几何中，$\overline{AB}$ 是外接圆的直径和 $\angle C = \pi/2$ 是等价的，显然也是 a, b 边固定时 $\triangle$ 面积的极大。在此值得一提者是：二边边长给定的三角形，在第三边为其外接圆的直径时面积极大在非欧几何中亦成立。]

<u>球面四边形的面积</u>：

在欧氏平面几何中，矩形面积公式扮演著重要的角色。再者，矩形乃是平行四边形的特例，亦即对角线等长的平行四边形（或者说，是四顶点共圆的平行四边形）。所以，在球面几何中，矩形的自然推广就是上述球面「平行四边形」在四顶点共圆（或对角线等长）的情形。由[定理 7.5]的[推论 1]可见，给定两对对边边长（设为 a, b）的「平行四边形」之中，其面积以矩形为极大。

【定理 7.7】：（球面矩形面积公式）在单位球面上以 a, b 为其两对对边长的矩形，其面积公式为

$$\square(a,b) = 4\tan^{-1}\left\{\frac{(1-\cos a)(1-\cos b)}{2(\cos a+\cos b)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

<u>证明</u>：令其对角线长为 c（两者等长）。则有

$$\begin{aligned}&1+\cos c = \cos a + \cos b\\&u = 2(\cos a+\cos b)\\&D^2 = 2(\cos a+\cos b)(1-\cos a)(1-\cos b)\end{aligned}$$

亦即

$$\square(a,b) = 4\tan^{-1}\frac{D}{u} = 4\tan^{-1}\left\{\frac{(1-\cos a)(1-\cos b)}{2(\cos a+\cos b)}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \square$$

其实，顶点共圆时面积为极大并不只限于「平行四边形」，详见下述[定理 7.8]：

【定理 7.8】：在四边边长给定为 $\{\ell_i, 1\le i\le 4\}$ 而且总长少于 2π 的四边形中，其面积以顶点共圆时为唯一的极大值，而且远离共圆的变形使得面积愈来愈小。

<u>证明</u>：令 $c_i = \cos \ell_i$, $x = 1 + \cos d$，其中 $d = \widehat{AC}$（在 $\square ABCD$ 非凸时，我们选定 $\widehat{AC}$ 是位于内部的那条对角线），以 $\triangle_1, \triangle_2$ 分别表示 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的面积，则有：

$$A(\square ABCD) = \triangle_1 + \triangle_2 = 2\tan^{-1}\frac{D_1}{u_1} + 2\tan^{-1}\frac{D_2}{u_2}$$

其中

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1 + c_2 + x, \quad u_2 = c_3 + c_4 + x \\ D_1^2 &= -(c_1 + c_2)^2 + 2(c_1c_2 + 1)x - x^2 \\ D_2^2 &= -(c_3 + c_4)^2 + 2(c_3c_4 + 1)x - x^2 \end{aligned}$$

[选取顶点之顺序使得 $D_1 = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 和 $D_2 = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ 都是正的。]

由[定理 7.5] [推论 1]的微分计算，即有

$$A'(x) = \triangle_1'(x) + \triangle_2'(x) = \frac{c_1 + c_2 - x}{xD_1} + \frac{c_3 + c_4 - x}{xD_2}$$

现在让我们用向量代数来分析一下上式右侧的几何意义：令 $\ell_1 = T_A \cap T_C$, $P_0 = T_A \cap T_C \cap (OAC)$，则有 $\overrightarrow{OP_0}$ 是 $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ 的线性组合而且 $\overrightarrow{OP_0}\cdot\mathbf{a} = \overrightarrow{OP_0}\cdot\mathbf{c} = 1$，所以

$$\overrightarrow{OP_0} = \frac{1}{1 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$$

再者，设 P 是 ℓ_1 上任给一点，则由 $\ell \perp (OAC)$ 可见 $\overrightarrow{P_0P}$ 乃是 $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ 的一个倍积，所以

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) + k(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

令 V_1, V_2 分别是 T_B, T_D 和 ℓ_1 的交点，亦即

$$V_1 = T_A \cap T_C \cap T_B, \quad V_2 = T_A \cap T_C \cap T_D$$

则有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OV_1} &= \frac{1}{1 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) + k_1(\mathbf{a}\times\mathbf{c}), \quad \overrightarrow{OV_1}\cdot\mathbf{b} = 1 \\ \overrightarrow{OV_2} &= \frac{1}{1 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) + k_2(\mathbf{a}\times\mathbf{c}), \quad \overrightarrow{OV_2}\cdot\mathbf{d} = 1 \end{aligned}$$

直接计算可得

$$\frac{1}{x}(c_1+c_2)-k_1D_1=1 \Rightarrow k_1=\frac{c_1+c_2-x}{xD_1}$$
$$\frac{1}{x}(c_3+c_4)+k_2D_2=1 \Rightarrow k_2=\frac{x-c_3-c_4}{xD_2}$$

由此可见

$$\overrightarrow{V_2V_1}=(k_1-k_2)\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\left(\frac{c_1+c_2-x}{xD_1}+\frac{c_3+c_4-x}{xD_2}\right)\mathbf{a}\times\mathbf{c}=A'(x)\mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

所以在 $V_1=V_2$ 时 $A(x)$ 为极大，而 $V_1=V_2$ 也就是顶点共圆。 □

【例题 1】：设 x_0 为四边形面积函数的极值点，即

$$A'(x_0)=\frac{c_1+c_2-x_0}{x_0D_1(x_0)}+\frac{c_3+c_4-x_0}{x_0D_2(x_0)}=0$$

若 $c_1+c_2=c_3+c_4$，则显然 $x_0=c_1+c_2=c_3+c_4$ 是所求之解，再者在这种情形，$\overset{\frown}{AC}$ 乃是外接圆的直径而 $\triangle_1(x_0)$ 和 $\triangle_2(x_0)$ 各别都是极大。

若 $c_1+c_2\neq c_3+c_4$ （可以设 $c_1+c_2>c_3+c_4$ ），由条件式

$$\frac{c_1+c_2-x_0}{x_0D_1}+\frac{c_3+c_4-x_0}{x_0D_2}=0$$

即

$$\frac{c_1+c_2-x_0}{x_0D_1}=\frac{x_0-c_3-c_4}{x_0D_2} \quad (>0)$$

所以有

$$\frac{c_1+c_2-x_0}{x_0-c_3-c_4}=\frac{D_1(x_0)}{D_2(x_0)}$$

令其为 λ，则有

$$\begin{aligned}\lambda^2&=\frac{D_1(x_0)^2}{D_2(x_0)^2}=\frac{(c_1+c_2-x_0)^2}{(c_3+c_4-x_0)^2}\\&=\frac{D_1(x_0)^2+(c_1+c_2-x_0)^2}{D_2(x_0)^2+(c_3+c_4-x_0)^2}\\&=\frac{(1-c_1)(1-c_2)}{(1-c_3)(1-c_4)}\\ \Rightarrow \quad \lambda&=\sqrt{\frac{(1-c_1)(1-c_2)}{(1-c_3)(1-c_4)}}\end{aligned}$$

再由

$$\frac{c_1+c_2-x_0}{x_0-c_3-c_4}=\lambda=\sqrt{\frac{(1-c_1)(1-c_2)}{(1-c_3)(1-c_4)}}$$

即求得

$$x_0=\frac{(c_1-c_2)\sqrt{(1-c_3)(1-c_4)}+(c_3-c_4)\sqrt{(1-c_1)(1-c_2)}}{\sqrt{(1-c_3)(1-c_4)}+\sqrt{(1-c_1)(1-c_2)}}$$

注意: 在 $c_1+c_2=c_3+c_4$ 时，上述公式即为

$$x_0=c_1+c_2=c_3+c_4$$

所以上述由 $\{c_i=\cos\ell_i, 1\le i\le 4\}$ 表达 $x_0=1+\cos d$ 的公式是普遍成立的！

【例题 2】：设四边形的四个边长依序取定为 $\{\ell_i, 1\le i\le 4\}$，令 φ 为 $\angle B$ 的角度，则其面积为 φ 的函数，亦即 $A(x), x=x(\varphi)$。由馀弦定律，即

$$\sin\ell_1\sin\ell_2\cos\varphi=(x-1)-\cos\ell_1\cos\ell_2$$

对 x 求微分，即得

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{1}{D_1}=\frac{1}{(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}}$$

再者，原先由[定理 8]的证明已得

$$\overrightarrow{V_2V_1}=\frac{dA}{dx}\mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_2V_1}\cdot\mathbf{b}&=\frac{dA}{dx}(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}\\&=\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=\frac{dA}{d\varphi}\end{aligned}$$

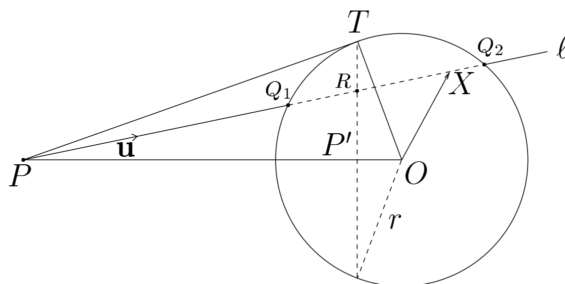
【习题】：

(1) 试问球面上一个保长变换的定点子集有那些可能性？并举例说明你所说的那种可能性是的确可能的。

(2) 设 $\triangle ABC$ 是一个直角球面三角形，$\angle C=\frac{\pi}{2}$。试证

$$\cos B=\frac{\tan a}{\tan c},\ \tan A=\frac{\tan a}{\sin b},\ \tan B=\frac{\tan b}{\sin a}$$

(3) 设 $S^2(r)$ 是一个以 O 为球心，半径为 r 的球面。P 是球外一个给定点（如 [图 7–16] 所示）：



[图 7–16]

设 ℓ 为过 P 点而且交 $S^2(r)$ 于 Q_1, Q_2 的直线。试证恒有

$$\overline{PQ_1}\cdot\overline{PQ_2}=\left|\overrightarrow{OP}\right|^2-r^2$$

[提示：设 $\mathbf{u}$ 是直线 ℓ 上的单位长向量，$\overline{PQ_1}=k_1, \overline{PQ_2}=k_2$ 而 X 是 ℓ 上的动点，则有 $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{OP}+k\mathbf{u}$，其中 k 是 $\overrightarrow{PX}$ 的有向长度，而 $X\in S^2(r)$ 的条件式则是 $\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OX}=r^2$。]

(4) 设 PT_i 是和 $S^2(r)$ 相切于 T_i 的那条切线，$i=1,2$。试证 $\overline{PT_1}$ 和 $\overline{PT_2}$ 等长，并描述所有过 P 点和 $S^2(r)$ 相切的切点所组成的点集。

(5) 令 P' 是位于直线 OP 之上而且 $\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OP}=r^2$ 的点，Π 是和 OP 正交于 P' 点的平面，令 $R=\ell\cap\Pi$。试证 $(PR;Q_1Q_2)$ 成调和点列，亦即

$$\frac{\overrightarrow{Q_1P}}{\overrightarrow{PQ_2}}\cdot\frac{\overrightarrow{Q_2R}}{\overrightarrow{RQ_1}}=-1$$

第八章

圆锥截线的故事

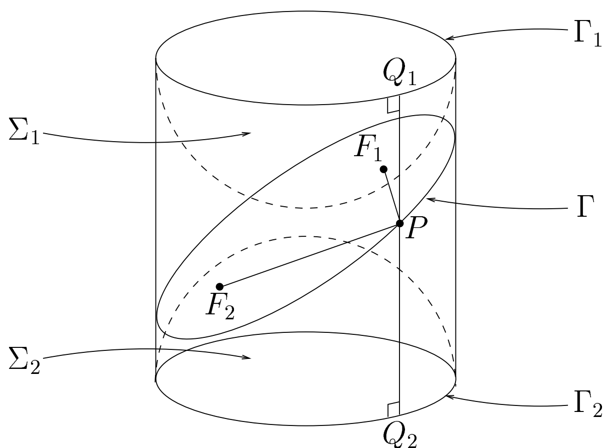
在现代的中学数学课程中，通常是在初等解析几何中学到圆锥截线，亦即椭圆、双曲线和抛物线。圆锥截线的发现和研究起始于古希腊。Euclid, Archimedes, Apollonius, Pappus 等几何学大师都热衷于圆锥截线的研究，而且都有专著论述其几何性质，其中以 Apollonius 所著的八册《圆锥截线论》集其大成，可以说是古希腊几何学一个登峰造极的精譬之作。当时对于这种既简朴又完美的曲线的研究，乃是纯粹从几何学的观点，研讨和圆密切相关的这种曲线；它们的几何乃是圆的几何的自然推广，在当年这是一种纯理念的探索，并不寄望也无从预期它们会真的在大自然的基本结构中扮演著重要的角色。此事一直到十六、十七世纪之交，Kepler 行星运行三定律的发现才知道行星绕太阳运行的轨道，乃是一种以太阳为其一焦点的椭圆。Kepler 三定律乃是近代科学开天劈地的重大突破，它不但开创了天文学的新纪元，而且也是牛顿万有引力定律的根源所在。由此可见，圆锥截线不单单是几何学家所爱好的精简事物，它们也是大自然的基本规律中所自然选用的精要之一。

在本章将以圆锥截线的来龙去脉为中心课题，简明扼要地叙述这一段由古希腊几何学到牛顿天体力学引人入胜、发人深思的篇章。

8.1 圆柱截线和圆锥截线

常见的一段竹杆，大体上是一个圆柱。它的正切截线是一个圆，但是其斜切截线则不再是圆的，这也许就是「椭圆」的一种自然出处。

圆的几何特性乃是它有一个圆心，和其上各点等距；自然会问这种由斜截圆柱所得的「椭圆」是否也具有类似的几何特性呢？古希腊几何学家在上述问题的探讨中获得令人鼓舞的简洁答案，亦即一个椭圆具有两个焦点 F_1, F_2 使得其上任给一点到两者的距离之和为一定长（其实，这也就是通常在初等解析几何中椭圆的定义），我们用 [图 8–1] 来解说当年对于这种圆柱截线的基本特性的证法。设 Γ 是一个半径为 R 的圆柱面和一个斜截平面 Π 的交集，我们可以用两个半径为 R 的球面 Σ_1, Σ_2 由上、下两端，沿著柱面向截面 Π 滑动，一直到分别和 Π 相切于 F_1, F_2 的位置（如 [图 8–1] 所示）。



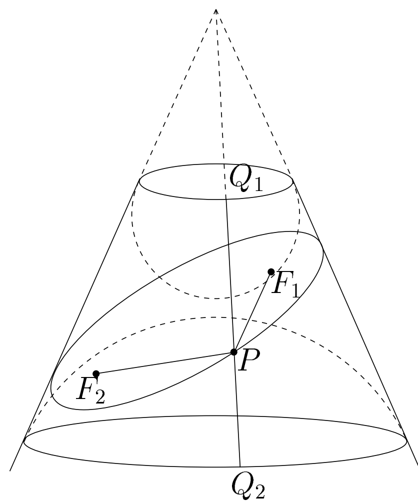
[图 8–1]

令 Γ_1, Γ_2 分别是上、下球面 Σ_1, Σ_2 和柱面相切的圆。设 P 是椭圆 Γ 上任给一点，$\overline{Q_1Q_2}$ 是柱面上过 P 点的那一条直线段，$Q_1 \in \Gamma_1, Q_2 \in \Gamma_2$。则有

$$\overline{PF_1} = \overline{PQ_1}, \quad \overline{PF_2} = \overline{PQ_2} \quad \text{（定点到一个球面的切线长相等）}$$
$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{Q_1Q_2} \quad \text{（定长）}$$

大体上，这也就是当年古希腊几何学家运用圆柱和球面的简朴特性所得出的「圆柱斜截线」的几何特性及其证明。这的确是一个令人鼓舞的杰作！

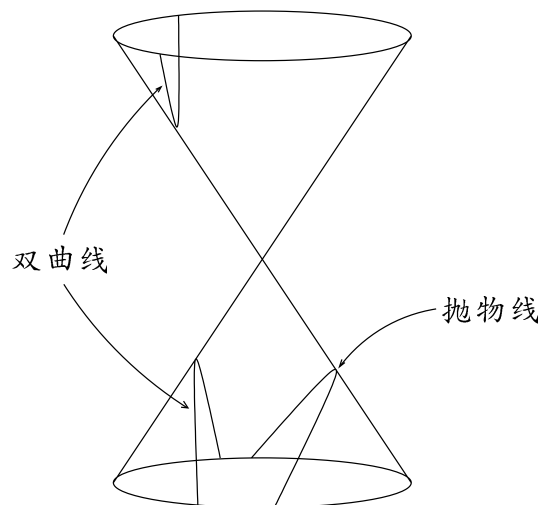
後来又发现上述简洁精擘的证明其实可以稍加推广，亦即把圆柱面更换成圆锥面依然成立，如 [图 8–2] 所示。



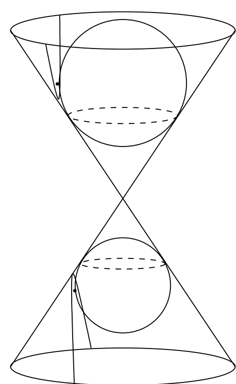
[图 8–2]

再者，如 [图 8–3] 所示，平面和圆锥面的交截还可以产生另外两种曲线，亦即现在叫做双曲线和抛物线者也。如 [图 8–4]、[图 8–5] 所示，双曲线也有两个焦点，而抛物线则只有一个焦点，而且也可以用类似的几何论证，证明双曲线和抛物线的几何特性分别如下，即：

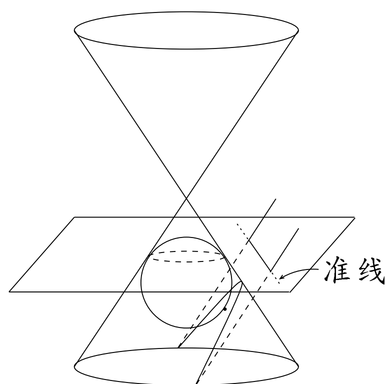
$$\text{双曲线：}\ \left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right| = \text{定值；}$$
$$\text{抛物线：}\ \overline{PF} = d(P,\ell),\quad \text{其中 } \ell \text{ 是准线。}$$



[图 8–3]



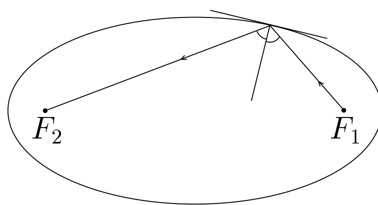
[图 8–4]



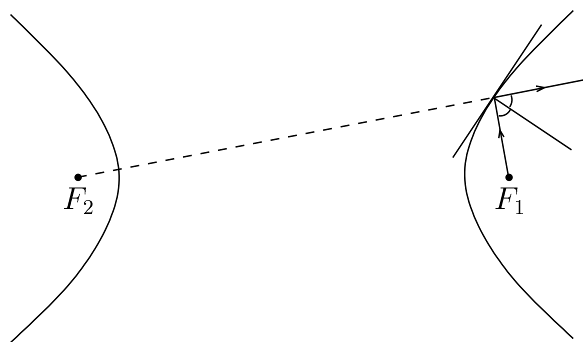
[图 8–5]

8.2 圆锥截线的光学性质

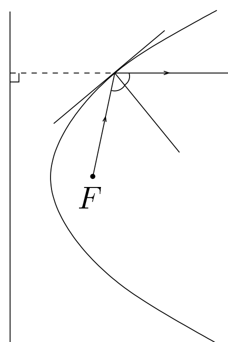
为什麼把上面所说的特殊点 F_1, F_2 和抛物线的 F 叫做焦点呢？这种名称根源于椭圆、双曲线和抛物线的下述光学性质，即如 [图 8–6]、[图 8–7]、[图 8–8] 所示。



[图 8–6]



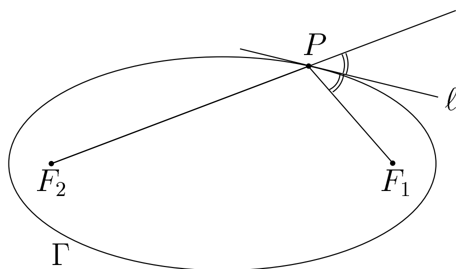
[图 8–7]



[图 8–8]

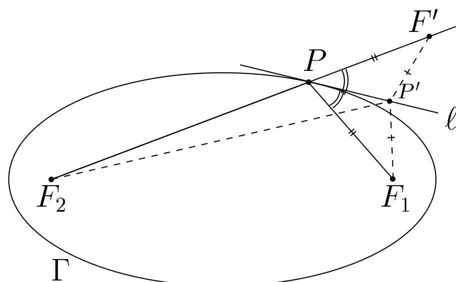
以上各点在 Apollonius 的论著中都有详细的几何证明。兹简述在椭圆情况的证明如下（其余两者的证明则留作习题）：

令 P 为椭圆 Γ 上任意给定点。如 [图 8–6′] 所示，过 P 点作 F_2PF_1 外角的角平分线 ℓ：



[图 8–6′]

现证明 ℓ 和 Γ 相切于 P 点，亦即 ℓ 上任何相异于 P 之点 P' 皆在椭圆 Γ 之外，即 $\overline{F_2P'}+\overline{P'F_1}>\overline{F_2P}+\overline{PF_1}$。兹证之如下：



[图 8–6″]

如 [图 8–6″] 所示，在 F_2P 线上取 F' 使得 $\overline{PF'}=\overline{PF_1}$，则有 $\triangle P'PF_1 \cong \triangle P'PF'$ (S.A.S.)。由此即得

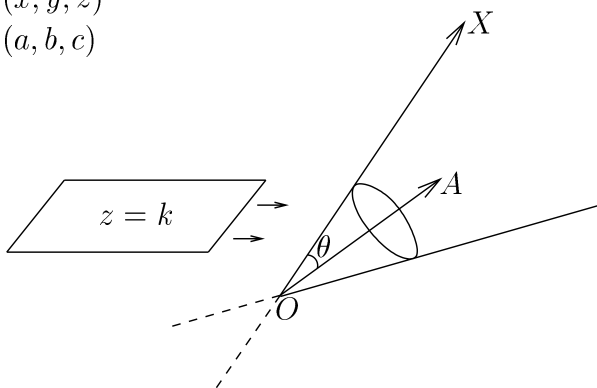
$$\begin{aligned}\overline{F_2P}+\overline{PF_1} &= \overline{F_2P}+\overline{PF'}\\ &< \overline{F_2P'}+\overline{P'F'}\\ &= \overline{F_2P'}+\overline{P'F_1}\end{aligned}$$

由此易证 F_1P, F_2P 两者和在 P 点的法线 (normal line) 所成的角度必定相等（亦即：入射角 $=$ 反射角）。

8.3 圆锥截线和二次曲线

到了十七世纪，几何学的研究方法出现了革命性的突破，那就是笛卡儿 (Descartes)、费玛 (Fermat) 所创导的解析几何学。而这种新方法的牛刀小试就自然是把这种新引进的坐标解析法用来研讨圆锥截线的几何，以期能够温故知新。首先，我们要来看一看一个圆锥截线的方程式究竟为何？

$$\overrightarrow{OX} = (x, y, z)$$
$$\overrightarrow{OA} = (a, b, c)$$



[图 8–9]

$$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA} = \left|\overrightarrow{OX}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \cos\theta \quad \text{（圆锥的方程式）}$$

亦即 $(ax + by + cz)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)\cos^2\theta$.

由此可见上述圆锥和 $z = k$ 的交截的方程式就是：

$$(ax + by + ck)^2 = (x^2 + y^2 + k^2)(a^2 + b^2 + c^2)\cos^2\theta$$

总之，上述直截了当的计算说明了任何一个圆锥截线的方程式都是一个二元二次方程式，其一般形式可以写成

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

概括地来说，所有圆锥截线都是二次曲线。很自然地我们会反问，是否任何二次曲线也都是圆锥截线呢？

为了要解答上述逆问题，就自然地会认识到下面这种「坐标变换不变量」的基本思想。

8.4 坐标变换和不变量

空间的一个重要本质是它完美的对称性和均匀性，它在坐标解析几何中的反映就是所有正交坐标系（亦称之为笛卡儿坐标系）之间的互换等价性。当我们用坐标解析法去研讨几何事物时，一定要铭记在心，只有那种和坐标系的选取无关者才具有本质的几何内涵。例如当我们在研讨二次曲线时，同一条二次曲线在两个不同的正交坐标系 $\{O;x,y\}$ 和 $\{O';x',y'\}$ 中的方程式各异。设其分别为

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

和

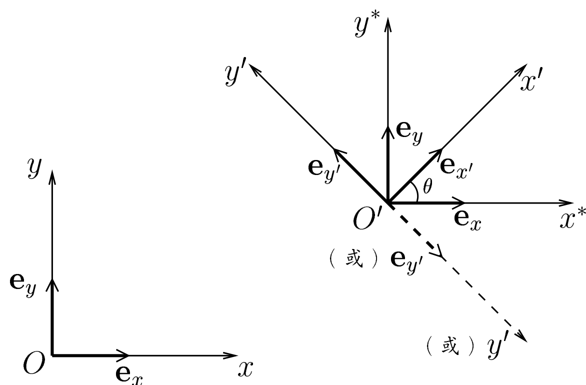
$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0$$

所以上述两个方程式的系数比例组即 $\{A:B:C:D:E:F\}$ 和 $\{A':B':C':D':E':F'\}$ 其本身并不具有本质的几何意义，而只有在坐标变换之下保持不变的那种系数组合才会具有本质性的几何意义。由此可见，要研讨一般二次曲线的几何就自然得从其方程式系数的不变组合（通常叫做方程式的坐标变换不变量）的系统研讨著手。长话短说，二次方程式在正交变换和平移变换之下具有下述三个基本不变量，即恒有：

$$\begin{aligned} A+C &= A'+C' \\ B^2-AC &= B'^2-A'C' \\ \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

通常分别用符号 $H,\delta,\triangle$ 表示上述三个基本不变量。再者，所有其他的不变量都可以表达成上述三个基本不变量 $\{H,\delta,\triangle\}$ 的函数。在此且先说明 H,δ 和 $\triangle$ 在坐标变换之下的不变性：

1. 平面上的任给保长变换都可以由平移和正交（转轴）变换组合而成。相应地，平面上任给两个正交坐标系 $\{O;x,y\}$ 和 $\{O';x',y'\}$ 之间的坐标变换也可以分解成平移和正交坐标变换的组合，如 [图 8–10] 所示。



[图 8–10]

2. 设 P 是平面上任给一点，它在坐标系 $\{O;x,y\}$, $\{O';x^*,y^*\}$ 和 $\{O';x',y'\}$ 中的坐标分别为 (x,y), (x^*,y^*) 和 (x',y')，即有

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$$
$$\overrightarrow{O'P} = x^*\mathbf{e}_x + y^*\mathbf{e}_y = x'\mathbf{e}_{x'} + y'\mathbf{e}_{y'}$$

设 $\overrightarrow{OO'} = h\mathbf{e}_x + k\mathbf{e}_y$, $\angle\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_{x'}) = \theta$, $\angle\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_{y'}) = \theta$（或 $\pi+\theta$），则有

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = (h+x^*)\mathbf{e}_x + (k+y^*)\mathbf{e}_y$$
$$\Rightarrow \quad x = x^*+h,\ y = y^*+k$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{x'} = \cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_{y'} = -\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_y \quad （或\ \sin\theta\,\mathbf{e}_x - \cos\theta\,\mathbf{e}_y） \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^* = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y^* = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + h \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + k \end{cases}$$

3. 将上式代入一个二次曲线在 $\{O;x,y\}$ 中的方程式

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

展开，集项而得者乃是它在 $\{O';x',y'\}$ 中的方程式。由此，比较系数即

得

$$\begin{cases} A' = A\cos^2\theta + C\sin^2\theta + B\sin 2\theta \\ B' = (C-A)\sin\theta\cos\theta + B\cos 2\theta \\ C' = A\sin^2\theta + C\cos^2\theta - B\sin 2\theta \\ D' = (Ah+Bk+D)\cos\theta + (Bh+Ck+E)\sin\theta \\ E' = (Bh+Ck+E)\cos\theta - (Ah+Bk+D)\sin\theta \\ F' = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + 2Dh + 2Ek + F \end{cases}$$

4. 由上述二次曲线的系数的坐标变换式，即可直接验证 H 和 δ 的不变性如下，即：

$$A' + C' = A(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + C(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = A + C$$

而用直接展开可得

$$\begin{aligned} B'^2 &= (C-A)^2\sin^2\theta\cos^2\theta + \underline{B(C-A)\cos 2\theta\sin 2\theta} + B^2\cos^2 2\theta \\ -A'C' &= -A^2\cos^2\theta\sin^2\theta - AC\cos^4\theta + \underline{AB\cos^2\theta\sin 2\theta} \\ &\quad -AC\sin^4\theta - C^2\cos^2\theta\sin^2\theta + \underline{BC\sin^2\theta\sin 2\theta} \\ &\quad -\underline{AB\sin^2\theta\sin 2\theta} - \underline{BC\sin 2\theta\cos^2\theta} + B^2\sin^2 2\theta \end{aligned}$$

在上式中，$B^2\cos^2 2\theta$ 和 $B^2\sin^2 2\theta$ 合起来当然就是 B^2，而 B'^2 中有底线的项又刚好和 $-A'C'$ 中有底线的项相消，所以即得

$$\begin{aligned} B'^2 - A'C' &= B^2 + (C^2 - 2AC + A^2)\sin^2\theta\cos^2\theta - A^2\cos^2\theta\sin^2\theta \\ &\quad -C^2\cos^2\theta\sin^2\theta - AC(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \\ &= B^2 - AC(\cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta) \\ &= B^2 - AC(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 = B^2 - AC \end{aligned}$$

5. 我们当然可以用同样的直接代换方法来验证 $\triangle$ 的不变性，但是其中的运算颇为繁复。下面将提供有一个较佳的方法，而且亦可以突出矩阵运算的优越性。一个二次曲线可以用下述矩阵形式表达：

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

另一方面，前述的坐标变换式在矩阵形式下亦可以写成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & h \\ \sin\theta & \cos\theta & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ h & k & 1 \end{pmatrix}$$

所以由直接代换可得

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & h \\ \sin\theta & \cos\theta & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

亦即

$$\begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & h \\ \sin\theta & \cos\theta & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由此可见，用行列式的乘法公式即有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ h & k & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & h \\ \sin\theta & \cos\theta & k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \end{aligned}$$

将上述基本不变量的理解再和坐标变换结合运用，就可以有系统地把二次曲线加以几何分类。例如当 $\delta \neq 0$ 的情形，即可求得一个平移变换：

$$\begin{cases} x = x^* + h \\ y = y^* + k \end{cases}$$

使得 $D^* = E^* = 0$，亦即由下述线性方程组

$$\begin{cases} Ah + Bk + D = 0 \\ Bh + Ck + E = 0 \end{cases}$$

即可求得上述平移中的 $\{h, k\}$。这样，原给曲线在坐标系 $\{O'; x^*, y^*\}$ 中的方程式就变为（注意：平移变换不会改变 A, B, C 的值）

$$Ax^{*2} + 2Bx^*y^* + Cy^{*2} + F^* = 0$$

其中 $F^* = -\frac{\triangle}{\delta}$。接着我们还可以用适当的转轴变换，即

$$\begin{cases} x^* = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y^* = x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases}$$

使得 $B' = (C - A)\sin\theta\cos\theta + B\cos 2\theta = 0$，亦即

$$\tan 2\theta = \frac{2B}{A - C} \ \Rightarrow\ \theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2B}{A - C}$$

（若取 $0 < \theta \le \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4} \le \theta < \pi$ 者，则可以保持 $A' - C'$ 和 $A - C$ 同号，试证之。）则曲线在坐标系 $\{O'; x', y'\}$ 中的方程式为

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0, \quad (F' = F^* = -\tfrac{\triangle}{\delta})$$

而上述 $\{A', C'\}$ 是可以由方程组 $\begin{cases} A' + C' = H = (A + C) \\ A'C' = -\delta = AC - B^2 \end{cases}$ 直接求得，亦即 $\{A', C'\} = \left\{\frac{H}{2} \pm \sqrt{(\frac{H}{2})^2 + \delta}\right\}$。

[注]：若一条二次曲线在变换 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ 之下保持不变，则称之为具有「心对称」者。把这个变换代入二次曲线的方程式中，即有

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 - 2Dx' - 2Ey' + F = 0$$

由此可见一条二次曲线具有心对称的充要条件就是 $D = E = 0$。当 $\delta \ne 0$ 时，我们可以求得平移变换使得 $D^* = E^* = 0$，所以在这个情况二次曲线是具有心对称者；但若果 $\delta = 0$，则情况会是怎样？我们可以用下面的分析来研讨：

设 $\delta=0$，我们可以先用一个转轴变换

$$\begin{cases} x = x^*\cos\theta - y^*\sin\theta \\ y = x^*\sin\theta + y^*\cos\theta \end{cases}$$

使得 $B^*=0$。因为 $0=\delta=B^{*2}-A^*C^*=-A^*C^*$，所以 A^* 和 C^* 之中必有一个为零，不妨由 θ 的适当选取（即使得 $A-C, A^*-C^*$ 同号或异号的 θ）使得 $C^*=0$。所以经过上述转轴变换之後，二次曲线在坐标系 $\{O;x^*,y^*\}$ 的方程式为

$$A^*x^{*2}+2D^*x^*+2E^*y^*+F^*=0$$

再用一个平移变换 $x^*=x'-\frac{D^*}{A^*}, y^*=y'$ 即有

$$A'x'^2+2E'y'+F'=0, \quad (A'=A^*, E'=E^*)$$

上式中的 $\{A',E'\}$ 可以用不变量求得：$H=A', \triangle=-A'E'^2$，即 $E'=\pm\sqrt{-\frac{\triangle}{H}}$。当 $E'\neq 0$，亦即 $\triangle\neq 0$ 时，这是一条抛物线，而且还可以用平移变换 $x'=x'', y'=y''-\frac{F'}{2E'}$ 将方程式简化为 $A'x''^2+2E'y''=0$。当 $E'=0$，亦即 $\triangle=0$ 时，则二次曲线会蜕化至一对直线（实或虚）的情形。

总结上述分析，我们可以用不变量 $H,\delta,\triangle$ 把一般的二次曲线作系统分类如下：

<u>第一种</u> $\delta\neq 0$：在这种情形，二次曲线的方程式经过适当的平移、转轴变换後就可以写成

$$A'x'^2+C'y'^2+F'=0, \quad (F'=F^*=-\frac{\triangle}{\delta})$$

(1) 若 A', C' 同号（即 $\delta=-A'C'<0$）而且与 F' 异号（即 $H\cdot\triangle<0$），则属于椭圆的类别 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

(2) 若 A', C', F' 同号（即 $\delta<0, H\cdot\triangle>0$），则属于虚椭圆的类别 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$；

(3) 若 A', C' 同号（即 $\delta<0$）而且 $F'=0$（即 $\triangle=0$），则二次曲线会蜕化为一点 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$（或可当做交于一实点的一对虚直线）；

(4) 若 A', C' 异号（即 $\delta > 0$）而且 $F' \neq 0$（即 $\triangle \neq 0$），则属于双曲线的类别 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$；

(5) 若 A', C' 异号（即 $\delta > 0$）而且 $F' = 0$（即 $\triangle = 0$），则属于一对相交直线的类别 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$；

第二种 $\delta = 0$：在这种情形，二次曲线的方程式经过适当的转轴、平移变换後就可以写成

$$A'x'^2 + 2E'y' + F' = 0$$

(6) 若 $E' \neq 0$（即 $\triangle = -A'E'^2 \neq 0$），则属于抛物线的类别 $y = ax^2$；

(7) 若 $E' = 0$（即 $\triangle = 0$），则属于一对（平行，相重或虚）直线的类别 $x^2 = a^2, x^2 = 0$ 或 $x^2 = -a^2$。

[注]：由上述分类可以直接看到，一条二次曲线会蜕化为一对（平行，相重，相交或虚）直线的充要条件就是 $\triangle = 0$。

8.5 五点定一「二次曲线」和六点共在一「二次曲线」的条件

在初等几何中有两个熟知的事实，即两点定一直线和不共线三点定一圆。若改用解析观点来看，上述几何事实与直线和圆的方程式中系数比的个数是密切相对应的。亦即

$$\text{直线方程：} Ax + By + C = 0$$

中具有两个相互独立的系数比 $\{A : B, A : C\}$；

$$\text{圆方程：} A(x^2 + y^2) + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

中具有三个相互独立的系数比 $\{A : D, A : E, A : F\}$。再者，运用线性方程组的基础理论，我们还可以用行列式直接写下三点共线和四点共圆的坐标条件式，即

$P_i(x_i, y_i), 1 \le i \le 3$, 三点共线的条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$P_i(x_i, y_i), 1 \le i \le 4$, 四点共圆的条件是

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

同样理由，我们也有下述六点 $\{P_i(x_i, y_i), 1 \le i \le 6\}$ 共在一个二次曲线上的代数条件是

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \\ x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

因为它就是存在有不全为零的系数组 $\{A, B, C, D, E, F\}$ 使得

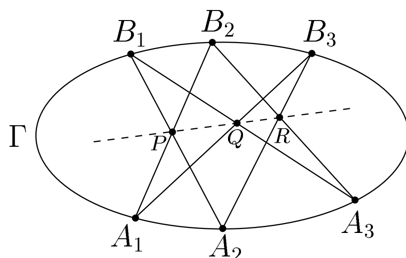
$$Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F = 0, \quad 1 \le i \le 6$$

的充要条件。假如我们把 $\{(x_i, y_i), 1 \le i \le 5\}$ 想成是取定者，而把 (x_6, y_6) 想成是变动者，而且改用符号 (x, y)，则上述六阶行列式也就是过 $\{P_i(x_i, y_i), 1 \le i \le 5\}$ 这五点的唯一二次曲线的方程式。这也就是「五点定一二次曲线」的代数表述。

8.6 Pascal 定理和 Pappus 定理

上面所讨论的是六点共在一二次曲线上的坐标代数条件式。很自然地我们还应该研讨六点共在一二次曲线的几何条件究竟是什麼？这也就是著名的 Pascal 定理。Blaise Pascal (1623–1662) 英年早逝，他在少年时代曾著有一本圆锥截线的小册子，可惜当年印份极少，很早就连孤本也找

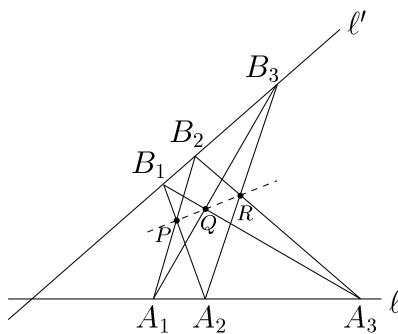
不到了。但是 Leibniz 说他早年曾经拜读过，还记得其中有下述这个美妙的定理，即在一个圆锥截线 Γ 上任取六点 $\{A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3\}$，如[图 8–11] 所示，令 $P = A_1B_2 \cap A_2B_1$, $Q = A_1B_3 \cap A_3B_1$, $R = A_2B_3 \cap A_3B_2$，则恒有 $\{P, Q, R\}$ 三点共线。



[图 8–11]

但是 Leibniz 说他已经不记得 Pascal 在书中所给的证明了，所以我们现在只能从 Pascal 当代的几何认知环境来作一种合情合理的探讨与推测。

早在纪元三世纪末，Pappus 的几何著作中即已出现下述命题，即如[图 8–12] 所示，设 $\{A_1, A_2, A_3\}$, $\{B_1, B_2, B_3\}$ 是分别在 ℓ 和 ℓ' 上的三点组。令 $P = A_1B_2 \cap A_2B_1$, $Q = A_1B_3 \cap A_3B_1$, $R = A_2B_3 \cap A_3B_2$，则 $\{P, Q, R\}$ 三点共线。



[图 8–12]

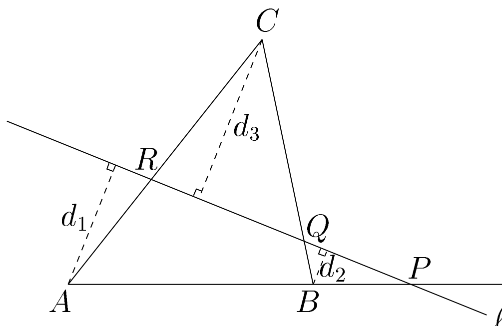
可惜这样美妙的命题乃是仅仅以一个习题形式出现而并没有在书中给以论证，显然 Pappus 和当代的几何学家们是知道如何证明上述命题的。他们当时究竟是怎麽证的呢？却又是一个有待探讨与推测的「证法考古题」。

现在让我们先来探讨 Pappus 定理的古证理当如何。由于这个命题是以习题形式出现，我们相信它是能够以当年熟知的几何定理推导出来的。回顾当年有关的几何定理，其中就只有 Menelous 逆定理是以「三点共线」为其结论者，所以我们可以想到当年大概是要运用 Menelous 逆定理来证明 Pappus 定理。我们先重温 Menelous 定理和其逆定理（详见第二章例题）：

【Menelous 定理和逆定理】：设直线 ℓ 与 $\triangle ABC$ 三边所在之直线 AB, BC, CA 分别相交于 P, Q, R 相异三点，则下述有向长度比之乘积恒等于 -1：

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} \equiv -1$$

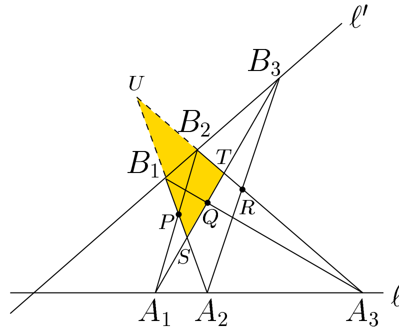
反之，若相异三点 P, Q, R 分别在 $\triangle ABC$ 三边 AB, BC, CA 之上并满足上面有向长度比的条件式，则 P, Q, R 三点共线。



[图 8–13]

现在让我们运用 Menelous 定理和逆定理来证明 Pappus 定理。

就命题的图形所给的八条直线，我们可以就地取材，选取其中三条分别过 P, Q, R 者来构成一个三角形，然後再对于其馀五条直线运用 Menelous 定理。如 [图 8–14] 所示，我们选取了 A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2 来构成 $\triangle STU$。



[图 8–14]

对 A_1B_2 运用 Menelous 定理：

因 $ST\cap A_1B_2=\{A_1\}, TU\cap A_1B_2=\{B_2\}, US\cap A_1B_2=\{P\}$，所以：

$$\frac{\overrightarrow{SA_1}}{\overrightarrow{A_1T}}\cdot\frac{\overrightarrow{TB_2}}{\overrightarrow{B_2U}}\cdot\frac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{PS}}=-1$$

对 A_2B_3 运用 Menelous 定理：

因 $ST\cap A_2B_3=\{B_3\}, TU\cap A_2B_3=\{R\}, US\cap A_2B_3=\{A_2\}$，所以：

$$\frac{\overrightarrow{SB_3}}{\overrightarrow{B_3T}}\cdot\frac{\overrightarrow{TR}}{\overrightarrow{RU}}\cdot\frac{\overrightarrow{UA_2}}{\overrightarrow{A_2S}}=-1$$

对 A_3B_1 运用 Menelous 定理：

因 $ST\cap A_3B_1=\{Q\}, TU\cap A_3B_1=\{A_3\}, US\cap A_3B_1=\{B_1\}$，所以：

$$\frac{\overrightarrow{SQ}}{\overrightarrow{QT}}\cdot\frac{\overrightarrow{TA_3}}{\overrightarrow{A_3U}}\cdot\frac{\overrightarrow{UB_1}}{\overrightarrow{B_1S}}=-1$$

对 ℓ 运用 Menelous 定理（然後颠倒）：

因 $ST\cap\ell=\{A_1\}, TU\cap\ell=\{A_3\}, US\cap\ell=\{A_2\}$，所以：

$$\frac{\overrightarrow{A_1T}}{\overrightarrow{SA_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_3U}}{\overrightarrow{TA_3}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_2S}}{\overrightarrow{UA_2}}=-1$$

对 ℓ' 运用 Menelous 定理（然後颠倒）：

因 $ST\cap\ell'=\{B_3\}, TU\cap\ell'=\{B_2\}, US\cap\ell'=\{B_1\}$，所以：

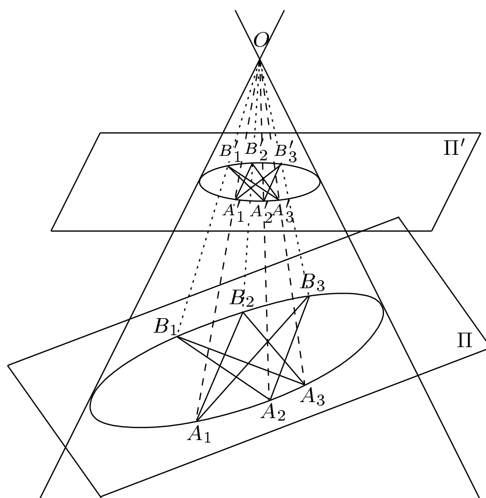
$$\frac{\overrightarrow{B_3T}}{\overrightarrow{SB_3}}\cdot\frac{\overrightarrow{B_2U}}{\overrightarrow{TB_2}}\cdot\frac{\overrightarrow{B_1S}}{\overrightarrow{UB_1}}=-1$$

现将上面所得的五条等式相乘起来，便会发现有很多项能够互相抵消，最後便可得出下面等式：

$$\frac{\overrightarrow{SQ}}{\overrightarrow{QT}} \cdot \frac{\overrightarrow{TR}}{\overrightarrow{RU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{PS}} = -1$$

运用 Menelous 逆定理，即知 P, Q, R 三点共线，Pappus 定理证毕。

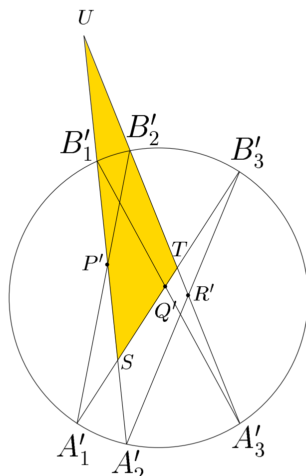
接著让我们来探讨 Pascal 当年的证明究竟有那种合情合理的可能性。首先，他当然熟知 Pappus 定理，而且也知道对于 Pappus 定理的上述证法。再者，他所要证明者，其实就是 Pappus 定理在非蜕化锥线的推广。如 [图 8–15] 所示，Σ, Σ' 分别是圆锥 Γ 和两个平面 Π, Π' 的截线，而且 Σ' 是一个圆。令 $\{A'_1, A'_2, A'_3; B'_1, B'_2, B'_3\}$ 是 Σ' 上的相应六点使得 $\{O, A_i, A'_i\}$ 和 $\{O, B_i, B'_i\}$ 皆为共线三点组。



[图 8–15]

令 $P' = A'_1B'_2 \cap A'_2B'_1$, $Q' = A'_1B'_3 \cap A'_3B'_1$, $R' = A'_2B'_3 \cap A'_3B'_2$。不难看到 $\{O, P, P'\}$, $\{O, Q, Q'\}$, $\{O, R, R'\}$ 也都是共线三点组。所以 $\{P', Q', R'\}$ 三点共线的充要条件乃是 $\{P, Q, R\}$ 三点共线。由此可以想到，Pascal 当年想要证明者，其实可以归于圆的情形去加以证明的。换句话说，只要能够把它对圆的「特殊情形」加以证明，则「一般情形」的证明就可以运用上述透视对应加以推论而得！按照 Pascal 当代的几何认知来判断，上面这种运用圆锥截线「与生俱来」的透视对应把 Pascal 定理的

证明归于圆的情形加以论证的想法是相当自然的。总之，只要有了这个想法，就自然会同样地去构造在 Pappus 定理的古证中那个分别含有 P', Q', R' 于其三边之上的那个三角形，如 [图 8–16] 所示的 $\triangle STU$。



[图 8–16]

把 Pappus 定理中所用的 [图 8–16] 和 [图 8–14] 相比较，其差别是前者除 $\triangle STU$ 的三边之外尚有五条直线而後者则尚有三条直线和一个圆。我们当然可以先对这三条直线运用 Menelous 定理，即得

$$\frac{\overrightarrow{SA_1'}}{\overrightarrow{A_1'T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TB_2'}}{\overrightarrow{B_2'U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UP'}}{\overrightarrow{P'S}} = -1$$

$$\frac{\overrightarrow{SB_3'}}{\overrightarrow{B_3'T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TR'}}{\overrightarrow{R'U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UA_2'}}{\overrightarrow{A_2'S}} = -1$$

$$\frac{\overrightarrow{SQ'}}{\overrightarrow{Q'T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TA_3'}}{\overrightarrow{A_3'U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UB_1'}}{\overrightarrow{B_1'S}} = -1$$

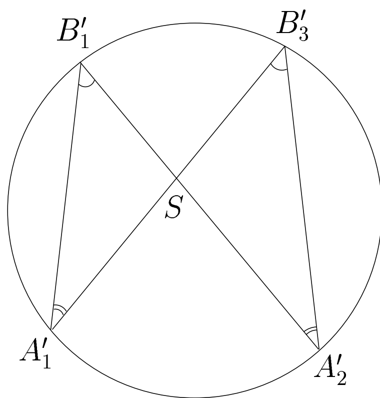
相乘之後再重组，其所得为

$$\frac{\overrightarrow{SA_1'}}{\overrightarrow{A_2'S}} \cdot \frac{\overrightarrow{SB_3'}}{\overrightarrow{B_1'S}} \cdot \frac{\overrightarrow{TB_2'}}{\overrightarrow{B_3'T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TA_3'}}{\overrightarrow{A_1'T}} \cdot \frac{\overrightarrow{UA_2'}}{\overrightarrow{B_2'U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UB_1'}}{\overrightarrow{A_3'U}} \cdot \frac{\overrightarrow{SQ'}}{\overrightarrow{Q'T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TR'}}{\overrightarrow{R'U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UP'}}{\overrightarrow{P'S}} = -1$$

把上式和 Menelous 逆定理中的条件相比，上式左侧多了一个

$$\frac{\overrightarrow{SA_1'}}{\overrightarrow{A_2'S}} \cdot \frac{\overrightarrow{SB_3'}}{\overrightarrow{B_1'S}} \cdot \frac{\overrightarrow{TB_2'}}{\overrightarrow{B_3'T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TA_3'}}{\overrightarrow{A_1'T}} \cdot \frac{\overrightarrow{UA_2'}}{\overrightarrow{B_2'U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UB_1'}}{\overrightarrow{A_3'U}}$$

在此，自然会想到应该运用圆的几何性质去证明它恒等于 1。其实，如 [图 8–17] 所示，由圆周角相等易见



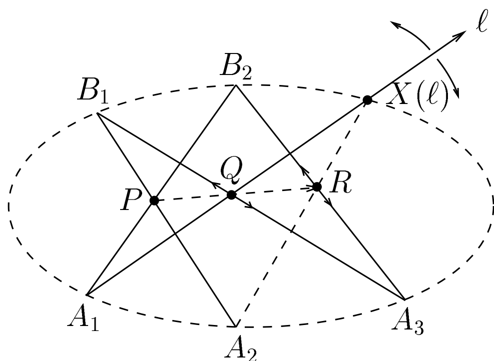
[图 8–17]

$\triangle SA_1'B_1'$ 和 $\triangle SA_2'B_3'$ 相似，所以 $\dfrac{\overrightarrow{SA_1'}}{\overrightarrow{A_2'S}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{SB_3'}}{\overrightarrow{B_1'S}} = 1$。同理即得

$$\frac{\overrightarrow{TB_2'}}{\overrightarrow{B_3'T}} \cdot \frac{\overrightarrow{TA_3'}}{\overrightarrow{A_1'T}} = 1, \quad \frac{\overrightarrow{UA_2'}}{\overrightarrow{B_2'U}} \cdot \frac{\overrightarrow{UB_1'}}{\overrightarrow{A_3'U}} = 1$$

这样就可以证得 P', Q', R' 三点共线，再用透视对应即可证得 P, Q, R 三点也共线。由上面这一段分析和探讨来看，我们相信 Pascal 当年的证法，大致应该如此。

[注]：（一）Pascal 定理不但提供了六点共在一锥线的充要条件的几何表述，而且也提供了描绘那个五点所定的锥线的点线作图法。



[图 8–18]

（二）锥线的几何本质乃是圆的透视投影。由此可见，关于圆的任何一个在「透视投影之下保持不变」的几何性质，当然也是任给锥线所共有的几何性质。上述 Pascal 定理只是其中之一，当然它是其中极为重要的锥线特徵性质；其他各种各样的锥线的透视投影不变的共性，都可以用它来加以推导。

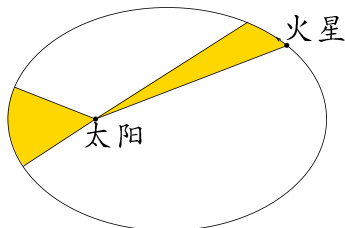
（三）Pappus 定理当年在 Pappus 的著作中，仅仅以习题形式出现，究其原因，大概是当代的几何学家们认为它只是一个美妙的命题而已；它在「当时」的几何体系中，并没有基本的重要性。其实 Pappus 定理的深刻蕴涵，一直到了十九世纪後半在射影几何学的研讨中，才展现出它的基本重要性。它乃是整个射影几何的基本定理 (fundamental theorem of projective geometry)。

8.7 Kepler 行星三定律

日月和四季的变化，具有明确的周期性和规律性；而且它们都全面地影响著大地上的一切现象和活动。所以自古以来各古文明都十分重视天象的观察也都认识到各种各样的天文知识。例如中国、埃及、巴比伦、希腊等古文明都发现漫天斗星之中，几乎所有的星象之间的相对位置都是固定不动，可以把它们想象成固定在一个旋转不休的「天球」上的「恒星」(fixed stars)。唯独有很少几颗相当明亮的星星，它们和其他星星的相对位置则是一直在变动，乃是在天球上不停游走的「行星」(planets：其意义是漫游者)。这几颗特出的行星，自古以来就吸引著世世代代的星象观察者。在古代的天文学中，观察和研讨日、月、行星在天空中运行的规律一直是最主要的中心课题。此事一直到十六、十七世纪之交，Kepler 行星三定律的发现才克竟其功，这也就是开创近代天文学的重大突破和奠基者。长话短说，Kepler 三定律乃是以 Tyco de Brahe 数十年对于行星运行夜以继夜，从不间断的详尽、致细的观察数据为基础。Kepler 再花了十多年功夫，用各种各样几何模型的数理分析去探索那个能够和 Tyco de Brahe 的观察数据充分吻合的行星运行模式。其间历尽艰辛，屡败不馁才在 1609 年终于完成了火星 (Mars) 的运行模式，这也就是他在《新天文学》(Astronomia Nova, 1609) 中所发表的第一与第二定律，即：

【第一定律】: 火星绕太阳以一个以太阳位于其焦点之一的椭圆运行。

【第二定律】: 在单位时间内，火星和太阳连线所扫过的面积恒相等，如 [图 8–19] 所示。

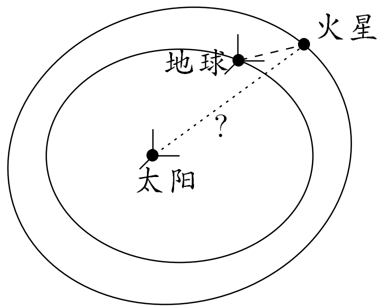


[图 8–19]

他接著又花了十年苦功去研究其他各行星的运行规律，它们不但也满足同样的第一、第二定律，而且在当年所知的六个行星（包括地球）的椭圆轨道的长径和其周期之间还满足下述美妙的第三定律，发表在《宇宙的和谐》(Harmonices Mundi, 1619)：

【第三定律】: 各个行星不但也满足同样的第一、第二定律，而且其轨道长径的立方和周期的平方之间的比值皆相等。

首先，让我们以後见之明，再来回顾、分析一下当年 Kepler 在发现行星三定律所经历的艰难苦功究竟是那一种数理分析？此事的细节说来话长，而 Kepler 所发表的《新天文学》其实乃是一本把他当年所经历的困难、失败与成功的实况实录，在此只简要地概述其中主要的困难所在。以後见之明来看，地球和火星都绕著太阳作椭圆的非等速运动，大约如 [图 8–20] 所示。



[图 8–20]

要注意，当年 Tyco de Brahe 以及自古以来所有的观察数据都是由地球向火星夜以继夜的观察，而 Kepler 所要探索的运行规律则是火

星和地球究竟是如何绕太阳作相对运动。因此他先得要作出一种猜想 (conjecture) 然後根据它来计算在各个时刻地球和火星之间的方向，并且把计算所得和 Tyco de Brahe 的实测方向逐一比较，看看是否逐一吻合？（亦即偏差在观察误差之内。）由此可见，其所涉及的计算在本质上乃是个不断在作相对运动的坐标系之间的坐标变换。在此得提醒一个现代读者的，Kepler 在作这种计算的年代比笛卡儿的坐标几何的诞生 (1637) 还要早四十年！总之，这是一种十分艰巨的「科学猜谜」。因为我们所能实测者乃是由地球到火星的观测数据，而 Kepler 所要探索者则是地球和火星对于太阳的相对运动的规律！他在这个无比艰巨的科学猜谜的征程上屡猜屡败，但他坚毅不屈，奋斗了十多年才成功地发现了第一、第二定律。然後，又继续努力了整整十年，才发现了第三定律。这种艰苦奋斗，屡败不馁的经历，在 Kepler 的名著 Astronomia Nova 中都有详细的纪录。他不但告诉我们後之来者那辉煌的最後成功，他也忠实地纪录下他每次失败的经验。其中最令人钦佩也最值得後学後进效法的是他在第 19 章之末所写的一段话。在那一章中他对于又一个猜想进行计算，发现它和 Tyco de Brahe 的火星实测数据都吻合到 2 分（亦即 $\frac{1}{30}$ 度）而这正是上述观测的确保准确度。但是在他正要为大功终于告成而欢心鼓舞的时刻，突然记起还有另外四个实测数据忘了验算。一算之下发现误差是 8 分。在这个时刻，他写下这样一段话[1]：「上帝赐与我们 Tyco de Brahe 的实测数据，是确保准到 2 分的。8 分的误差是不能接受的，让我们重新开始吧。」 Kepler 就是以这种高洁的科学精神，不得真相永不休的奋斗才终于发现了 Kepler 行星运行三定律的。

8.8 由 Kepler 定律到牛顿万有引力定律

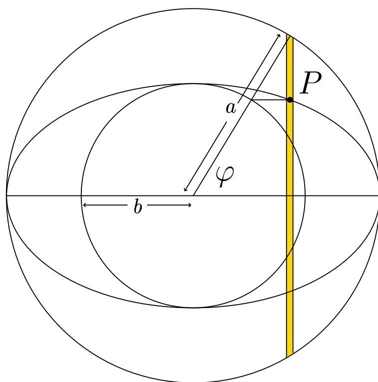
Kepler 三定律清楚地描述了行星运行的简单模式。一个自然的问题就是：「为什麽行星会以太阳为其一焦点的椭圆轨道运行？」牛顿对这个问题给了一个直接的答案，即行星与太阳之间存在满足平方反比

[1]原文英译："Since the divine benevolence has vouchsafed us Tyco Brahe, a most diligent observer, from whose observations the $8'$ error in this Ptolemaic computation is shown, ... Now, because they could not have been ignored, these eight minutes alone will have led the way to the reformation of all of astronomy, ..."

定律[2] (inverse square law) 的引力。而且这种引力同样地存在于任何两个物体之间，不论是火星与太阳或是苹果与地球，都是同一种引力；这就是牛顿著名的万有引力定律。现在让我们以现今的符号体系来重新看看牛顿这个对後世科学发展有著深远影响的工作。首先我们需要对椭圆的几何性质有一定的了解。

（一）椭圆面积公式：椭圆面积 $= \pi ab$

设椭圆的长、短径分别为 $2a, 2b$。现构造两个圆，半径分别为 a, b，并把椭圆夹于两者之间，如 [图 8–21] 所示。



$$P = P(x, y)$$
$$x = a\cos\varphi$$
$$y = b\sin\varphi$$

[图 8–21]

考虑图中那条过 $P(x, y)$ 的窄条面积。由于 $x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi$，在椭圆内的窄条面积和整条窄条面积的比率约为：

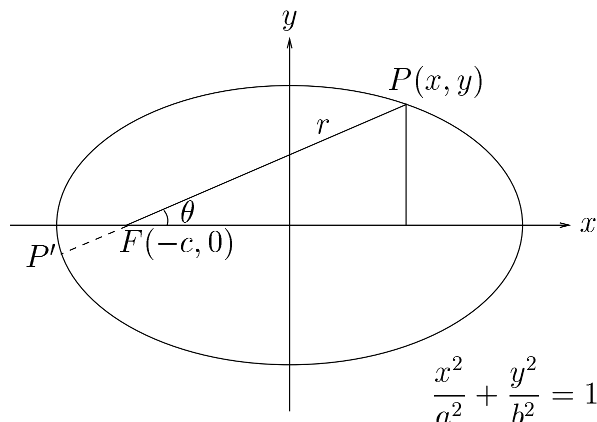
$$\frac{2b\sin\varphi\,\Delta x}{2a\sin\varphi\,\Delta x} = \frac{b}{a}$$

这是一个与 $P(x, y)$ 位置无关的常数。当把所有这种窄条的面积加起来时，便得

$$\text{椭圆面积} = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$$

[2]注：在这里有一段小插曲。平方反比引力的猜测并不是源自牛顿，而是 Hooke 在研究自由落体轨迹时的猜想。但 Hooke 本身是一位实验科学家，他不懂怎样用数学方法去证明这个猜想。虽然他和牛顿之间曾因光是波动或粒子学说引起争论，他仍然写信给牛顿，希望牛顿能以数理分析的方法来给与证明。

(二) 椭圆的极坐标方程式



[图 8–22]

如 [图 8–22] 所示，椭圆上一点 P 有 (x, y) 和 (r, θ) 两种表示方法，而 (x, y) 和 (r, θ) 之间的转换可以用

$$r\cos\theta = x + c, \quad r\sin\theta = y$$

来达成。把上面转换方法代入熟悉的椭圆坐标方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，即得

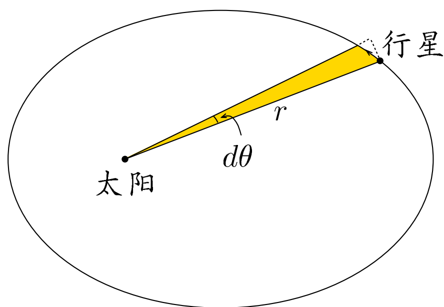
$$\begin{aligned}
b^2(r\cos\theta - c)^2 + a^2(r\sin\theta)^2 - a^2b^2 &= 0 \\
b^2(r^2\cos^2\theta - 2cr\cos\theta + c^2) + a^2r^2(1 - \cos^2\theta) - a^2b^2 &= 0 \\
(b^2 - a^2)r^2\cos^2\theta - 2b^2cr\cos\theta + b^2c^2 + a^2r^2 - a^2b^2 &= 0 \\
-c^2r^2\cos^2\theta - 2b^2cr\cos\theta - b^4 + a^2r^2 &= 0 \quad (a^2 = b^2 + c^2) \\
a^2r^2 - \left(rc\cos\theta + b^2\right)^2 &= 0 \\
\left[ar - (rc\cos\theta + b^2)\right]\left[ar + (rc\cos\theta + b^2)\right] &= 0
\end{aligned}$$

因此 $r = \dfrac{b^2}{a - c\cos\theta}$（$r = \dfrac{-b^2}{a + c\cos\theta}$ 是负值，它会以 P' 来描绘出椭圆）。为了方便以後的计算，我们取其颠倒式为椭圆极坐标方程式：

$$\frac{1}{r} = \frac{a - c\cos\theta}{b^2}$$

（三）第二定律的数理分析

以太阳（焦点）为中心，极坐标 (r,θ) 表达行星位置。当 θ 增大到 $\theta+d\theta$ 时，太阳与行星的连线所扫过的面积为 $dA\approx\frac{1}{2}r^2d\theta$，如 [图 8–23] 所示



[图 8–23]

运用第二定律，这个面积的改变速率为常数，即：

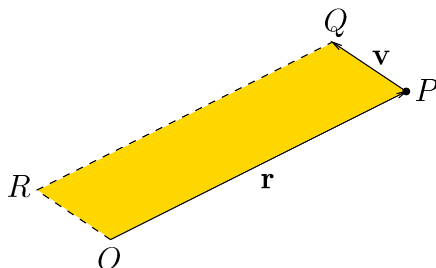
$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}r^2\omega=k,\quad (k\text{：常数，}\omega\text{：角速度})$$

$$\text{椭圆面积}=\pi ab=\int_0^T dA=\int_0^T kdt=kT\quad (T\text{：周期})$$

$$r^2\omega=2k=\frac{2\pi ab}{T}$$

注意在上面我们只是用了微积分的记号和想法，并没有用到深奥技巧。

[注]：从物理学观点来看，第二定律是有物理意义的。如 [图 8–24] 所示，$\mathbf{r}$ 是动点 P 的位置向量，$\mathbf{v}$ 是其速度向量：



[图 8–24]

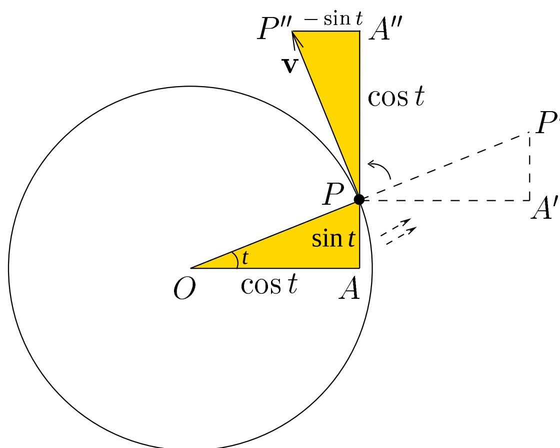
$|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|$ 是平行四边形 $OPQR$ 的面积。但从物理学观点来看，$\mathbf{r}\times m\mathbf{v}$ 是物体相对于 O 点的角动量，因为是平面（椭圆）运动，此向量是恒垂直于平面的，所以由第二定律亦可得知角动量在行星运行中是不变的（这也是人类理性文明中首次接触到角动量守恒律）。再者，

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) &= \mathbf{v}\times m\mathbf{v} + \mathbf{r}\times m\mathbf{a} \\ &= \mathbf{r}\times\mathbf{F}\end{aligned}$$

所以引力 $\mathbf{F}$ 的作用方向是和 $\mathbf{r}$ 反向平行。

（四）<u>温习：$\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的微分</u>

从圆的简单几何性质和简单的物理观念，我们很容易便得出 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的微分。其简单的推导如下：



[图 8–25]

如 [图 8–25] 所示，动点 P 在单位圆上作单位速率运动。用熟知的圆的参数表示方法，P 的坐标可写成 $(\cos t, \sin t)$。另一方面，从几何观点得知速度向量应是垂直于半径，所以把图中的 $\triangle OAP$ 平移至 $\triangle PA'P'$ 再旋转 $\frac{\pi}{2}$ 至 $\triangle PA''P''$。这样，速度向量 $\mathbf{v}$ 在 $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}$ 的分量为：

$$v_x = -\sin t, \quad v_y = \cos t$$

但从物理学观点来说，速度向量 $\mathbf{v}$ 正是：

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d}{dt}\cos t\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{d}{dt}\sin t\right)\mathbf{e}_y$$

因此即得下面熟悉的公式：

$$\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t, \quad \frac{d}{dt}\sin t = \cos t$$

（五）向心加速的公式：$-(-r\omega^2 + \frac{d^2r}{dt^2})$

上述公式只需对坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 直接微分便可得出。计算过程大致如下：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\omega\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\omega\cos\theta \end{cases} \quad (\omega = \dot{\theta})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - r\omega^2\cos\theta - 2\dot{r}\omega\sin\theta - r\dot{\omega}\sin\theta \\ \ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta - r\omega^2\sin\theta + 2\dot{r}\omega\cos\theta + r\dot{\omega}\cos\theta \end{cases}$$

因此

$$(\ddot{x}, \ddot{y}) = (\ddot{r} - r\omega^2)(\cos\theta, \sin\theta) + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})(-\sin\theta, \cos\theta)$$

由（四）知引力的方向是平行于位置方向 $(\cos\theta, \sin\theta)$，所以 $(2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})$ 应该是 0，并只馀下向心加速 $-(-r\omega^2 + \ddot{r})$。

（六）平方反比定律的证明（第一、第二定律的综合分析）

要证明引力是满足平方反比定律，我们只需验证 $r^2\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)$ 是否为一常数。先对椭圆的极坐标方程式微分：

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{a - c\cos\theta}{b^2} \\ -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} &= \frac{c}{b^2}\sin\theta\,\omega \\ \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} &= -\frac{c}{b^2}\sin\theta\, r^2\omega = -\frac{2\pi ac}{bT}\sin\theta \end{aligned}$$

在上式用了（三）$r^2\omega = \frac{2\pi ab}{T}$。同样地在下面的计算中，我们尽可能分

离出 $r^2\omega$ 这一项，然後换成常数 $\dfrac{2\pi ab}{T}$。

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{2\pi ac}{bT}\cos\theta\,\omega \\
\Rightarrow \quad r^2\frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{2\pi ac}{bT}\cdot\frac{2\pi ab}{T}\cos\theta \\
&= \frac{-4\pi^2a^2}{T^2}c\cos\theta \\
r^2(-r\omega^2) = -r^3\omega^2 &= -\frac{1}{r}(r^2\omega)^2 = -\frac{1}{r}\frac{4\pi^2a^2b^2}{T^2} \\
&= -\frac{4\pi^2a^3}{T^2} + \frac{4\pi^2a^2}{T^2}c\cos\theta
\end{aligned}
$$

因此 $r^2\left[-r\omega^2 + \dfrac{d^2r}{dt^2}\right] = -\dfrac{4\pi^2a^3}{T^2}$。

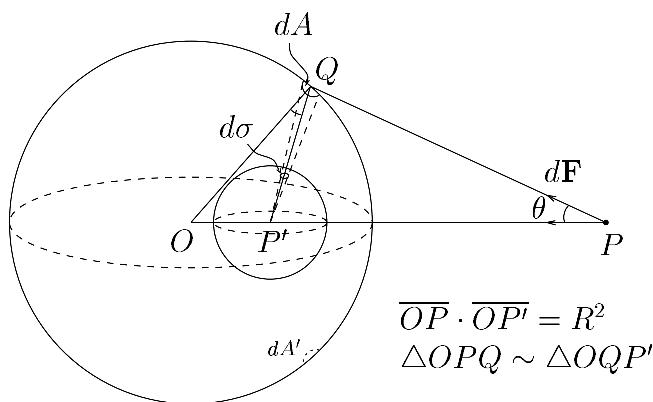
（七）由行星引力到万有引力

当牛顿想再进一步把行星与太阳之间的引力推广到任何物体与物体之间的引力，他遇到一个困难，使这位科学史上的巨人困扰了数年。由于行星与太阳之间的距离很大，所以在计算中可把行星和太阳当作两个质点，即可以假设质点集中了整个球体的质量；但当推广至任何物体与物体之间的情形，如苹果与地球，则便不可随便地把地球当作为一个质点了。牛顿遇到的困难，就是他不能证明的确可以把地球当作为质点的猜想。即使在 1684 年他的好友 Halley（哈雷）力邀牛顿发表已得的结果，他仍不愿意[3]发表。到了 1686 年，他终于成功地证明了上述猜想，即一个密度只随著到球心距离而变化的球体，在吸引球外一个质点时，所作用的力就像假设全部质量都集中在球心一样。在这年他写信给 Halley 表示同意写出他的工作，这就是在次年 (1687) 出版的科学巨著《自然哲学[4]的数学原理》 (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)。

牛顿在书中所给的证明是很繁复的。在这里，我们给出另一个证明，它巧妙地运用了球的几何特性而大大简化了计算过程。

[3]其後牛顿在给 Halley 的信中提到，直至 1685 年，他还在怀疑这个猜想是错的。
[4]在当年，哲学其实是指科学。自然哲学亦即是物理学。

对于一个球面的最自然、最对称的点当然就是球心。但是在研讨球面与球外一点的互相作用时，从几何观点来看，最自然、最对称的点就不再是球心，而是 [图 8–26] 的 P' 点（这是 P 相对于球面的反射对称点）。

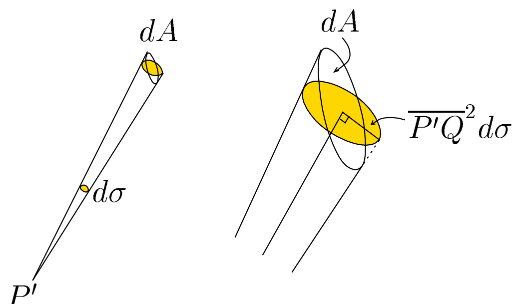


[图 8–26]

设球体其中一层薄壳的半径为 R，面密度为 ρ，薄壳质量为 $M=4\pi R^2\rho$，球外质点 P 的质量为 m。考虑在薄壳上的一小片面积 dA 作用于 P 的引力 $d\mathbf{F}$。因薄壳对于 OP 是旋转对称，$d\mathbf{F}$ 垂直于 OP 的分量会被对称小片 dA' 所作用力抵消，所以只需考虑 $d\mathbf{F}$ 在 OP 方向的分量：

$$|d\mathbf{F}|\cos\theta=G\frac{\rho dA\cdot m}{\overline{PQ}^2}\cos\theta$$

在直线段 $\overline{OP}$ 上选 P' 使得 $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=R^2$，并以 P' 为心构造一个单位球面。令 P' 连向 dA 的射线在这单位球面上的影象为 $d\sigma$。



[图 8–27]

如 [图 8–27] 所示，dA 和 $d\sigma$ 之间有一个简单的关系：

$$dA\cdot\cos\theta=\overline{P'Q}^2\cdot d\sigma$$

因此，整个薄壳作用于 P 的力就是

$$\begin{aligned}|\mathbf{F}|=\sum|d\mathbf{F}|\cdot\cos\theta&=\sum Gm\rho\frac{dA\cdot\cos\theta}{\overline{PQ}^2}=\sum Gm\rho\frac{\overline{P'Q}^2\cdot d\sigma}{\overline{PQ}^2}\\&=\sum Gm\rho\frac{R^2}{\overline{OP}^2}d\sigma=Gm\rho\frac{R^2}{\overline{OP}^2}\sum d\sigma\\&=Gm\rho\frac{R^2}{\overline{OP}^2}\cdot 4\pi=G\frac{Mm}{\overline{OP}^2}\end{aligned}$$

因此这层薄壳作用于 P 的力就相等于将全部质量 M 集中于 O 而作用于 P 的力。再将所有薄壳作用的力加起来，便得所需之公式。

这也就是由 Kepler 行星运行定律的数理分析自然而然地推导出牛顿万有引力定律的一个简朴详尽的叙述。它就是牛顿的科学巨著 Philosophiae Naturalis Principia Mathematica 中所讨论的主要结果。它也自然是後学後进应当心领神会，并从此体会人类理性文明世代相承，继往开来的精要和精神。

8.9 圆锥截线例题，极与极线

【例一】：圆锥截线方程的矩阵表达式：在 §8.4 中我们用到以矩阵来表达圆锥截线的方程式

$$\Gamma:\ Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

若引入矩阵记号

$$M=\begin{pmatrix}A&B&D\\B&C&E\\D&E&F\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

则 Γ 的方程可简洁地重新写成下面模式：

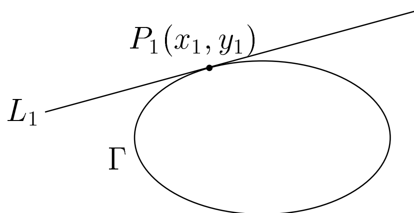
$$\Gamma:\ \mathbf{u}^TM\mathbf{u}=\begin{pmatrix}x&y&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B&D\\B&C&E\\D&E&F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$$

其中 $\mathbf{u}^T$ 表示把矩阵的行列互相转置 (transpose)，这个运算满足下述简单公式：

$$\text{设 } A, B \text{ 为适当大小的矩阵，则 } (A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$$

【例二】：圆锥截线切线方程：令 $\Gamma: Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ 为一圆锥截线，$P_1(x_1,y_1)$ 为 Γ 上任意的一点。在初等解析几何中我们熟知过 P_1 点的切线方程可以写成

$$L_1: Ax_1x+2B\Big(\frac{x_1y+y_1x}{2}\Big)+Cy_1y+2D\Big(\frac{x+x_1}{2}\Big)+2E\Big(\frac{y+y_1}{2}\Big)+F=0$$



[图 8–28]

这个公式的证明一般来说需要用到较为繁复的验算。现在我们尝试改用矩阵表达式和矩阵运算，把其验算过程大大的简化如下：

证明：不妨假设 Γ 是非蜕化的情况。若改用矩阵表达式，则 Γ 和 L_1 可以分别写成

$$\Gamma: \mathbf{u}^T M\mathbf{u}=0, \quad L_1: \mathbf{u}_1^T M\mathbf{u}=0$$

其中 $\mathbf{u}_1^T=\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & 1\end{pmatrix}$。若 Γ 与 L_1 只交于 P_1 这一点，则 L_1 即为 Γ 在 P_1 点的切线；假若不然，即 Γ 与 L_1 至少交于 P_1 和 P_2 两点：

$$P_1(x_1,y_1): \mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\1\end{pmatrix}, \quad P_2(x_2,y_2): \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\1\end{pmatrix}$$

首先，由所设 P_1, P_2 在 Γ 之上，即有

$$\mathbf{u}_1^T M\mathbf{u}_1=0 \quad \text{及} \quad \mathbf{u}_2^T M\mathbf{u}_2=0$$

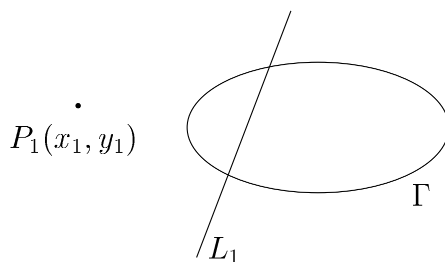
再者，我们也假设了 P_2 在 L_1 之上，即 $\mathbf{u}_1^T M\mathbf{u}_2=0$。

现于直线 $L_1 = P_1P_2$ 上任取一点 P，则可选取适当的实数 λ 使得 $P = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$。考虑 P 点的矩阵表达式：$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}_1 + (1-\lambda)\mathbf{u_2}$，则有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}^T M\mathbf{v}\\
&= (\lambda\mathbf{u}_1 + (1-\lambda)\mathbf{u}_2)^T M(\lambda\mathbf{u}_1 + (1-\lambda)\mathbf{u}_2)\\
&= \lambda^2\mathbf{u}_1^T M\mathbf{u}_1 + \lambda(1-\lambda)\mathbf{u}_1^T M\mathbf{u}_2 + \lambda(1-\lambda)\mathbf{u}_2^T M\mathbf{u}_1 + (1-\lambda)^2\mathbf{u}_2^T M\mathbf{u}_2\\
&= 0
\end{aligned}$$

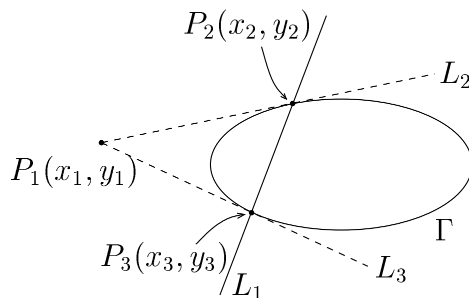
所以 P 点也同时在 Γ 之上，亦即 Γ 已包含整条直线 L_1，这自然是和 Γ 是非蜕化的假设互相矛盾。由此可见，Γ 与 L_1 只可能交于 P_1 这一点，亦即 L_1 乃是 Γ 在 P_1 的切线。

【例三】：当 $P_1 \in \Gamma$ 时，已知 $L_1 : \mathbf{u}_1^T M\mathbf{u} = 0$ 乃是 Γ 在 P_1 的切线；但若 P_1 不在 Γ 之上（如 [图 8–29] 所示）时，L_1 应该代表著什麽呢？



[图 8–29]

[解答] L_1 乃是由 P_1 到 Γ 的两条切线 L_2, L_3 的切点 P_2, P_3 所定的那条直线，如 [图 8–30] 所示。



[图 8–30]

证明：由前面的结果已知 L_2 和 L_3 的方程分别是

$$L_2 : \mathbf{u}_2^T M\mathbf{u} = 0, \quad L_3 : \mathbf{u}_3^T M\mathbf{u} = 0$$

再者，由于两者都过 $P_1(x_1, y_1)$ 点，即

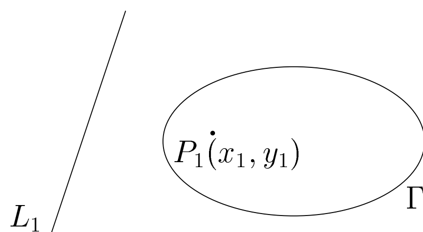
$$\mathbf{u}_2^T M\mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{及} \quad \mathbf{u}_3^T M\mathbf{u}_1 = 0$$

经转置 (transpose) 後即有

$$\mathbf{u}_1^T M\mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{及} \quad \mathbf{u}_1^T M\mathbf{u}_3 = 0$$

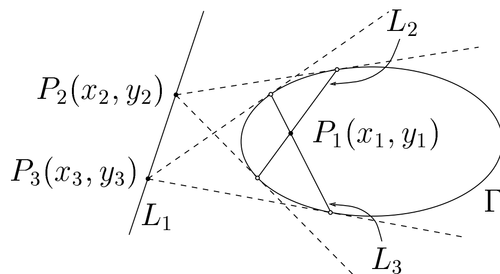
这就是说 P_2, P_3 在 $L_1 : \mathbf{u}_1^T M\mathbf{u} = 0$ 之上。

【例四】：其实 [图 8–29] 并不是 $P_1 \notin \Gamma$ 的唯一情况，我们还须考虑如 [图 8–31] 的情况，即 $P_1(x_1, y_1)$ 在 Γ 之内：



[图 8–31]

[解答] L_1 乃是由过 P_1 点的弦（如 [图 8–32] 所示的 L_2, L_3 等），其两端点切线的交点（如 P_2, P_3 等）所组成的点集。



[图 8–32]

证明：由前面的讨论已知：

$$L_2 \text{ 的方程是：} \mathbf{u}_2^T M\mathbf{u} = 0$$
$$L_3 \text{ 的方程是：} \mathbf{u}_3^T M\mathbf{u} = 0$$

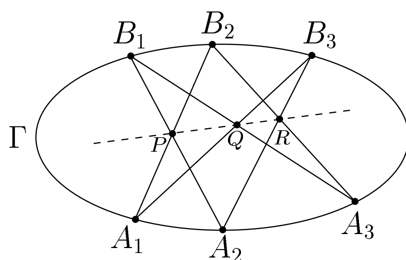
由于 L_2, L_3 都是过 P_1 点的弦，即

$$\mathbf{u}_2^T M \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{及} \quad \mathbf{u}_3^T M \mathbf{u}_1 = 0$$

亦即 $\mathbf{u}_1^T M \mathbf{u}_2 = 0$ 及 $\mathbf{u}_1^T M \mathbf{u}_3 = 0$。所以 P_2, P_3 皆在 L_1 之上。

[注]：由上面的例子我们可以看出 P 和 L 的密切（对偶）关系：给出 P 点，我们可以如前述例子般构作对应的 L；反之，给出直线 L，我们也可以把上面的程序倒过来构作 P。在射影几何中，P 与 L 分别称为「极 (pole)」与「极线 (polar)」。

【例五】：Pascal 定理的纯代数证明：在 §8.6 中，我们运用了几何透视对应方法来证明 Pascal 定理，即在一个圆锥截线 Γ 上任取六点 $\{A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3\}$，如 [图 8–11] 所示，令 $P = A_1B_2 \cap A_2B_1$, $Q = A_1B_3 \cap A_3B_1$, $R = A_2B_3 \cap A_3B_2$，则恒有 $\{P, Q, R\}$ 三点共线。



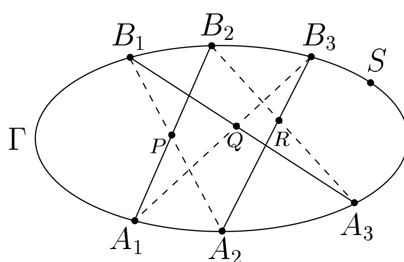
[图 8–11]

现在我们改用纯代数的方法来再次证明这个定理。这样做的好处一来是反映出代数理论在几何学上的不平凡应用；二来这种做法亦提供了一种途径来研究高维、高次的代数曲线。设

$$\begin{aligned} A_1B_2 &: \ell_1 = 0, \quad A_2B_1 : \ell_1' = 0 \\ A_2B_3 &: \ell_2 = 0, \quad A_3B_2 : \ell_2' = 0 \\ A_3B_1 &: \ell_3 = 0, \quad A_1B_3 : \ell_3' = 0 \end{aligned}$$

令 $F(k) : \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \ell_3 + k \cdot \ell_1' \cdot \ell_2' \cdot \ell_3' = 0$，则易见对于任给的实数 k，A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 这六点必然在三次曲线 $F(k)$ 之上，而且 $F(k)$ 也包含了 P, Q, R 这三点。不妨假设 Γ 为非蜕化圆锥截线。现于 Γ 上取第七点 S（但不在已给的六点组 $\{A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3\}$ 之内），然後选取适当的 $k = k_0$ 使得 S 同时也在 $F(k_0)$ 之上，亦即 Γ 与 $F(k_0)$ 相交于至少七点：

$$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, S \in \Gamma \cap F(k_0)$$



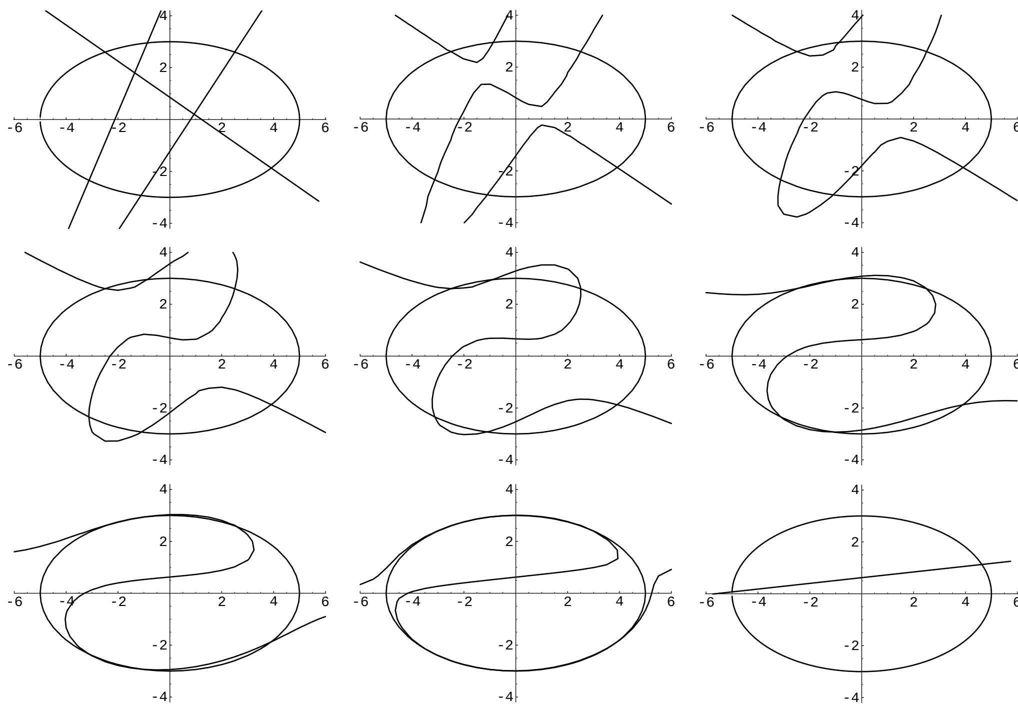
[图 8–33]

因为 Γ 是一个非蜕化的二次曲线，$F(k_0)$ 是一个三次曲线，一般来说它们最多只有六个交点，除非 Γ 本身就是 $F(k_0)$ 的一个因式。由于我们的构作使它们两者至少有七个交点，因此 Γ 必然可以整除 $F(k_0)$，即

$$F(k_0): (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F) \cdot (Lx + My + N) = 0$$

显然 P, Q, R 均不在 Γ 之上，所以它们必然全都在直线 $Lx+My+N=0$ 之上，Pascal 定理证毕。

当 k 由 $k=0$ 渐渐趋向 $k=k_0$，$F(k)$ 的变化就如 [图 8–34] 所示：



[图 8–34]